No Reference !!

Processus de Galton-Watson

226 243 266
229 253
241 264

Théorème : Soit X v.a. discrète intégrable à valeurs dans $\mathbb{N}$, soit $(p_k := \mathbb{P}(X=k))_{k\in\mathbb{N}}$, $m = \mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{+\infty} k p_k < +\infty$

Soit $(X_{i,j})$ famille de v.a. indépendantes de loi $\mathbb{P}_X$,

$Z_0 = 1$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_{i,n}$, $(\pi_n = \mathbb{P}(Z_n=0))_{n\in\mathbb{N}}$,

$\mathbb{P}_{ext} = \mathbb{P}(\{\exists n\in\mathbb{N} \mid Z_n = 0\})$ et $G : \begin{array}{l}[0;1] \to \mathbb{R} \\ s \mapsto \mathbb{E}[s^X] = \sum p_k s^k\end{array}$

Alors : (1) Si $m>1$, alors $\mathbb{P}_{ext}$ est l'unique point fixe de G sur $]0;1[$.

(2) Si $m\leq 1$, alors $\mathbb{P}_{ext} = 1$.

Preuve :

L'idée pour ce développement est de traiter deux cas pathologiques, de montrer la croissance et la convexité de G, de montrer que $\mathbb{P}_{ext}$ est le plus petit point fixe de G sur $[0;1]$ pour aboutir au résultat.

① On distingue 2 cas particuliers :

- Si $p_0 = 0$, alors $\forall n\in\mathbb{N}$, $Z_n \geq 1$ et alors $\mathbb{P}_{ext} = 0$
- Si $p_0 = 1$, alors $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $Z_n = 0$ et alors $\mathbb{P}_{ext} = 1$.

On suppose alors par la suite que $p_0 \in]0;1[$.

② Montrons que G est strictement croissante et convexe sur $]0;1[$ avec stricte convexité ssi $p_0+p_1<1$.

$\sum k p_k s^k$ converge normalement et donc uniformément sur $[0;1]$ vers G et est de classe $\mathcal{C}^1$.

La série $\sum p_k s^k$ ayant un rayon de convergence ≥ 1, par le théorème de dérivation terme à terme, $\forall s\in[0;1[$,

$G'(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} k p_k s^{k-1}$ et $G''(s) = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) p_k s^{k-2}$

Comme $p_0 > 1$ et $\sum p_k = 1$, alors $\exists k_0 \in\mathbb{N}^* \mid p_{k_0} > 0$.

Ainsi, $\forall s\in]0;1[$, $G'(s) \geq k_0 p_{k_0} s^{k_0-1} > 0$

$G''(s) \geq k_0(k_0-1) p_{k_0} s^{k_0-2} \geq 0$

d'où la stricte croissance et la convexité de G sur $]0;1[$.

Par ailleurs, • si $p_0+p_1 = 1$, alors G est affine

• si $p_0+p_1<1$, alors $\exists k_1 \in\mathbb{N}\setminus\{0;1\} \mid p_{k_1} > 0$

et alors $G''>0$ d'où la stricte convexité de G.

③ Soit, $\forall n\in\mathbb{N}$, $G_n(s) = \mathbb{E}[s^{Z_n}] = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z_n=k) s^k$.

Montrons que : (1) $\forall n\in\mathbb{N}, \forall i\in\mathbb{N}$, $Z_n \perp\!\!\!\perp X_{i,n}$

(2) $\forall n\in\mathbb{N}$, $G_n = G\circ\dots\circ G$.

(1) Soit $n\in\mathbb{N}$. Z_n ne dépend que de Z_{n-1} et $(X_{i,n-1})_{i\in\mathbb{N}}$.

Par récurrence, Z_n ne dépend que de $(X_{i,j})_{i\in\mathbb{N}, j<n}$.

Par indépendance des $(X_{i,j})$, $\forall i\in\mathbb{N}$, $Z_n \perp\!\!\!\perp X_{i,n}$

(2) On raisonne par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$.

* Initialisation : $G_1(s) = \mathbb{E}[s^{X_{1,0}}] = \mathbb{E}[s^X] = G(s)$

* Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons que $G_n = G\circ\dots\circ G$.

$$G_{n+1}(s) = \mathbb{E}\left[s^{\sum_{i=1}^{Z_n} X_{i,n}}\right]$$
$$= \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{Z_n} s^{X_{i,n}}\right]$$
$$= \mathbb{E}\left[\sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\prod_{i=1}^{k} s^{X_{i,n}}\right) \mathbb{1}_{Z_n=k}\right]$$

$\mathbb{E}\left[\sum_{N=0}^{+\infty} |x| \mathbb{1}_{Z_n=N}\right] \leq \mathbb{E}\left[\sum_{N=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{Z_n=N}\right] = 1 < +\infty$, avec $x = s^{\sum_{i=1}^{N} X_{i,n}}$

$$= \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{k} s^{X_{i,n}}\right] \mathbb{E}[\mathbb{1}_{Z_n=k}]$$ (par Fubini-Tonelli et car $Z_n \perp\!\!\!\perp X_{i,n}$)

$$= \sum_{k\in\mathbb{N}} \prod_{i=1}^{k} \mathbb{E}[s^{X_{i,n}}]\, \mathbb{P}(Z_n=k)$$ (car $X_{i,n} \perp\!\!\!\perp X_{j,n}$)

$$= \sum \mathbb{P}(Z_n=k) G(s)^k$$
$$= G_n(G(s))$$

④ Montrons que $\mathbb{P}_{ext}$ est le p.p. point fixe de G sur $[0;1]$.

On peut montrer par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$ que :

$\pi_{n+1} = G_{n+1}(0) = G\circ\dots\circ G(0) = G(G_n(0)) = G(\pi_n)$

avec $\pi_1 = \mathbb{P}(Z_1=0) = \mathbb{P}(X_{1,1}=0) = p_0 = G(0) = G(\pi_0)$

En passant à la limite l'égalité $\pi_{n+1} = G(\pi_n)$,

on a : $\mathbb{P}_{ext} = G(\mathbb{P}_{ext})$ par continuité de G.

En effet, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\pi_n = \mathbb{P}(Z_n=0) \leq \mathbb{P}(Z_{n+1}=0) = \pi_{n+1}$

car si $Z_n = 0$, alors $Z_{n+1} = 0$. Ainsi, (π_n) est une suite croissante majorée par 1.

Finalement, $\mathbb{P}_{ext} = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \{Z_n=0\}\right) = \lim_{+\infty} \mathbb{P}(Z_n=0) = \lim_{+\infty} \pi_n$

Soit $u>0$ un autre point fixe de G.

Montrons par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$ que $\forall n\in\mathbb{N}$, $\pi_n \leq u$

* Initialisation : Par croissance de G,

$\pi_1 = p_0 = G(0) \leq G(u) = u$

* Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons que $\pi_n \leq u$.

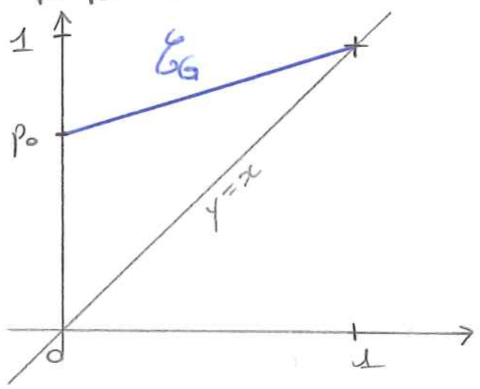
$\pi_{n+1} = G(\pi_n) \leq G(u) = u$ par croissance de G.

En passant à la limite, on a bien que $\mathbb{P}_{ext}$ est le p.p. point fixe de G sur $[0;1]$.

⑤ Montrons le résultat annoncé.

$m = G'(1)$ et $\begin{cases} G(0) = p_0 \\ G(1) = 1 \end{cases}$

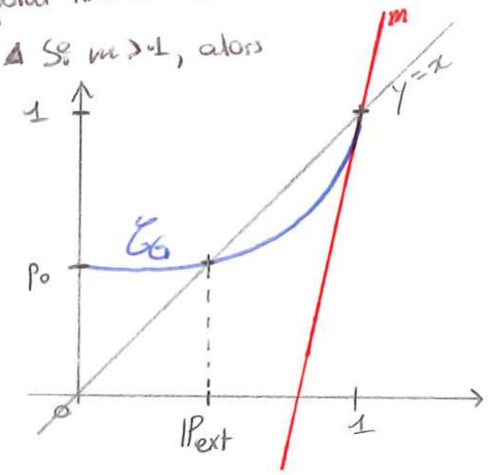
- Si $p_0 + p_1 = 1$, alors G est une droite



Dans ce cas, $G'(1) \leq 1$ et $\mathbb{P}_{ext} = 1$

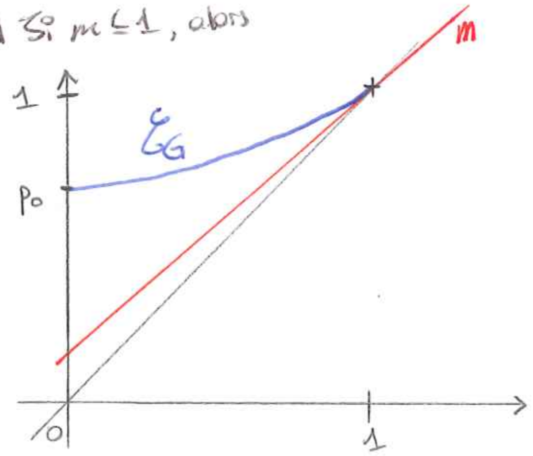
- Si $p_0 + p_1 < 1$, alors G est strictement convexe sur $]0;1[$ et il existe au plus un point fixe de G sur $]0;1[$.

▲ Si $m > 1$, alors



Dans ce cas, il existe bien un point fixe $\mathbb{P}_{ext} \in]0;1[$ plus petit que 1.

▲ Si $m \leq 1$, alors



Dans ce cas, $\mathbb{P}_{ext} = 1$ est bien le seul point fixe de G sur $[0;1]$.