Complétude de l'espace de Bergman du dique unité

Développement pour les leçons 201 (Espaces de fonctions), 205 (Espaces complets), 208 (Espaces vectoriels normés), 213, ...

On définit $\mathscr{B}^2(\mathbb{D}) = \mathscr{H}(\mathbb{D}) \cap \mathscr{L}^2(\mathbb{D}, \lambda^2)$, l'espace vectoriel [1] des fonctions holomorphes de carré intégrable sur le disque unité $\mathbb{D}$ de $\mathbb{C}$, qu'on appelle espace de Bergman sur $\mathbb{D}$. On munit cet espace du produit scalaire hermitien induit par celui de $L^2(\mathbb{D})$:

$$\langle , \rangle : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{B}^2(\mathbb{D}) & \to & \mathbb{C} \\ f, g & \mapsto & \langle f, g \rangle := \iint_{\mathbb{D}} f(z)\overline{g(z)} \mathrm{d}\lambda^2(z) \end{array} \right.$$

Cette application définit bien un produit scalaire car si $f \in \mathscr{B}^2(\mathbb{D})$ et $\langle f, f \rangle = 0$ alors $|f| = 0$ presque partout mais comme f est holomorphe, par le principe des zéros isolés, f est identiquement nulle sur $\mathbb{D}$. On note $\|.\|_2$ sa norme associée. On montre le théorème suivant :

Théorème 1 *L'espace $\mathscr{B}^2(\mathbb{D})$ muni du produit scalaire hermitien classique est un espace de Hilbert. De plus, la famille*

$$e_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{D} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\, z^n \end{array} \right. ; \; n \in \mathbb{N}$$

forme une base hilbertienne orthonormée de $\mathscr{B}^2(\mathbb{D})$.

Lemme 1 *Pour tout compact K de $\mathbb{D}$, on a l'estimation :*

$$\max_{z \in K} |f(z)| \leqslant C_K \|f\|_2$$

Preuve de la complétude Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{B}^2(\mathbb{D})^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de notre espace. Soit un compact K de $\mathbb{D}$. Grâce au lemme, on a pour tous $n, m \in \mathbb{N}$:

$$\max_{z\in K} |f_n(z) - f_m(z)| \leqslant C_K \|f_n - f_m\|_2.$$

Donc $(f_n)_n$ est une suite de Cauchy de l'espace $\mathscr{H}(\mathbb{D})$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact, qui est complet pour cette topologie (grâce au théorème de Weierstrass [2]), donc la suite converge uniformément vers une fonction $f \in \mathscr{H}(\mathbb{D})$. En particulier, elle converge vers f simplement.

Montrons que $(f_n)_n$ converge vers f dans l'espace $\mathscr{B}^2(\mathbb{D})$. Son caractère de Cauchy donne que, pour $\varepsilon > 0$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $n, m \geqslant N$: $\|f_n - f_m\|_{\mathscr{B}^2(\mathbb{D})} \leqslant \varepsilon$, soit :

$$\int_{\mathbb{D}} |f_n - f_m|^2 \mathrm{d}\lambda \leqslant \varepsilon^2.$$

Mais en faisant tendre m vers $+\infty$, comme (f_n) tend simplement vers f, on a par le lemme de Fatou :

$$\int_{\mathbb{D}} |f_n - f|^2 \mathrm{d}\lambda \leqslant \liminf \int_{\mathbb{D}} |f_n - f_m|^2 \mathrm{d}\lambda \leqslant \varepsilon^2.$$

Donc $f_n - f \in \mathscr{L}^2(\mathbb{D})$ donc $f \in \mathscr{L}^2(\mathbb{D})$ (et donc $f \in \mathscr{B}^2(\mathbb{D})$). De plus, pour tout $n \geqslant N$, $\|f_n - f\|_{\mathscr{B}^2(\mathbb{D})} \leqslant \varepsilon$, donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans l'espace de Bergman sur $\mathbb{D}$.
On en conclut que $(\mathscr{B}^2(\mathbb{D}), \langle , \rangle)$ forme un espace de Hilbert.

Base hilbertienne
Montrons tout d'abord que la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthonormée. Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}$. Soient $n, m \in \mathbb{N}$, :

$$\begin{array}{rcl} \langle e_n, e_m \rangle & = & a_n a_m \displaystyle\int_{\mathbb{D}} z^n \overline{z^m} \mathrm{d}\lambda^2(z) \\ & = & a_n a_m \displaystyle\int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} \rho^m \mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\theta} \rho \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\rho \\ & = & a_n a_m \displaystyle\int_0^1 \rho^{n+m+1} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-m)\theta} \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\rho \\ & = & \dfrac{a_n a_m}{n+m+2} \displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-m)\theta} \mathrm{d}\theta \end{array}$$

L'intégrale en θ est nulle si $n \neq m$, et vaut 2π sinon, d'où

$$\langle e_n, e_m \rangle = 0 \text{ si } n \neq m \qquad \text{et} \qquad \langle e_n, e_n \rangle = 2\pi \frac{a_n^2}{2(n+1)} = 1,$$

1. comme intersection de sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{D}, \mathbb{C})$
2. qui affirme que $\mathscr{H}(\mathbb{D})$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{C}(\mathbb{D})$ complet pour cette topologie

ce qui montre que la famille $(e_n)_n$ est orthonormée.

Montrons maintenant que cette famille est totale, c'est-à-dire que $\mathrm{Vect}(e_n, n \in \mathbb{N})^\perp = \{0\}$.
Soit $f \in \mathscr{B}^2(\mathbb{D})$. Comme f est holomorphe, elle est analytique et en particulier développable en série entière en 0, et son développement de Mac-Laurin :

$$f(z) = \sum_{m=0}^{+\infty} \alpha_m z^m$$

est uniformément convergent dans tout disque fermé [3] $\overline{D(0,r)} \subset \mathbb{D}$ où $0 \leqslant r < 1$. Calculons

$$\begin{aligned}
\langle e_n, f \rangle &= a_n \iint_{\mathbb{D}} f(z)\overline{z^m} \mathrm{d}\lambda^2(z) \\
&= a_n \lim_{r \to 1^-} \iint_{D(0,r)} f(z)\overline{z^m} \mathrm{d}\lambda^2(z) \\
&= a_n \lim_{r \to 1^-} \sum_{m=0}^{+\infty} \alpha_m \iint_{D(0,r)} z^n \overline{z^m} \mathrm{d}\lambda^2(z),
\end{aligned}$$

où l'échange série-intégrale est permis par la convergence uniforme ; or si $0 \leqslant r < 1$ et $n = m$:

$$\begin{aligned}
\iint_{D(0,r)} z^n \overline{z^m} \mathrm{d}\lambda^2(z) &= \int_0^r \int_0^{2\pi} \rho^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} \rho^m \mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\theta} \rho \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\rho \\
&= \frac{\pi}{n+1} r^{2n+2} \delta_{n,m} \to a_n^{-2},
\end{aligned}$$

ce qui donne finalement :

$$\langle e_n, f \rangle = \frac{\alpha_n}{a_n},$$

donc si $f \in \mathrm{Vect}(e_n, n \in \mathbb{N})^\perp$, alors $\alpha_n = a_n \langle e_n, f \rangle = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc f est nulle.
Donc la famille $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien totale et c'est donc une base hilbertienne de $\mathscr{B}^2(\mathbb{D})$.

1 Bibliographie

Analyse fonctionnelle et théorie des opérateurs, Charles, Mbekhta, Quéffélec, p.106, pp.118-120, ;
Problèmes de mathématiques appliquées ; tome 2 : Espace de Hilbert et opérateurs, Bayen, Margaria

3. "la série de Taylor en z_0 converge uniformément sur tout dique ouvert de centre z_0 inclus dans le domaine d'holomorphie"