

Quintet : Intégrale de Dirichlet

Préférence: Calcul Intégral Candelphigher, Bernis 40 deus, FGN Oreana x-Ens Analyse 3

Leçons: 220, 221, 235, 236, 239, 245, 250, 265

Théorème 1 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est semi-convergente.

Remarque: la fonction $\text{sinc} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée son cardinal,
 $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$
apparaît de manière récurrente en physique, notamment en théorie de l'information avec la formule de Shannon.

Démonstration: Candelphigher p. 30 (avec intégrales impropres)

#1: $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge. En effet, $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ est une fonction continue

sur $]0, +\infty[$ et elle est prolongeable en 0 par 1 car $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{t} = 1$.
De plus, pour tout $A > 1$, nous avons:

$$\int_1^A \frac{\sin t}{t} dt \stackrel{\text{IPP}}{=} \underbrace{\int_1^A \frac{-\cos t}{t} dt}_{\xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \cos 1} - \underbrace{\int_1^A \frac{\cos t}{t^2} dt}_{| \cdot | \leq \frac{1}{t^2} \in L^1([1, +\infty[)}$$

$uv' = [uv] - \int u'v \quad u = \frac{1}{t} \quad u' = -\frac{1}{t^2}$
 $v = \sin t \quad v' = \cos t$

Donc $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge.

#2: $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t} dt$ diverge. On va découper l'intégrale sur des intervalles de

longueur π pour avoir $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t| dt = \int_0^\pi \sin t dt$. Soit $n \in \mathbb{N}^+$, alors:

$$\begin{aligned} \int_0^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt \\ &\geq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t| dt \quad \text{car } t \leq (k+1)\pi \Rightarrow \frac{1}{t} \geq \frac{1}{(k+1)\pi} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)\pi} \int_0^\pi \sin t dt \quad \checkmark = 2 \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \frac{2}{\pi} H_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty. \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction croissante $F(u) = \int_0^u \frac{\ln t + 1}{t} dt$ est telle que $\lim_{u \rightarrow +\infty} F(u) = +\infty$,
donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} F(n) = +\infty$.

Théorème 2: $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

Démonstration 1: Par Fubini dans Carleperghes p. 112 (voir Théorème Fubini)

On part du constat que $\int_0^{+\infty} e^{-ny} dy = \frac{1}{n}$, et donc que $\frac{\sin n}{n} = \int_0^{+\infty} \sin n e^{-ny} dy$.
Posons $f:]0, A[\times]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ pour $A > 1$.

But: $\int_0^A \frac{\sin n}{n} dn = \int_0^A \left(\int_0^{+\infty} f(n, y) dy \right) dn = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^A f(n, y) dn \right) dy$

* f est intégrable.

$$\int_0^A \left(\int_0^{+\infty} |\sin n| e^{-ny} dy \right) dn = \int_0^A \frac{|\sin n|}{n} dn < +\infty$$

* Par le théorème de Fubini, on peut intervertir les intégrales et l'on a:

$$\begin{aligned} \int_0^A \sin n e^{-ny} dn &= \int_0^A \operatorname{Im}(e^{in}) e^{-ny} dn = \operatorname{Im} \left(\int_0^A e^{-x(y-i)} dx \right) \\ &= \operatorname{Im} \left[\frac{e^{-x(y-i)}}{-(y-i)} \right]_0^A = \operatorname{Im} \left(\dots \right) = \frac{1 - e^{-yA} (y \sin A + \cos A)}{1 + y^2} \end{aligned}$$

Puis:

$$\int_0^A \frac{\sin n}{n} dn = \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-yA} (y \sin A + \cos A)}{1 + y^2} dy = \frac{\pi}{2} - \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{e^{-yA} (y \sin A + \cos A)}{1 + y^2} dy}_{g_A(y)}$$

Avec: $|g_A(y)| \leq \frac{e^{-yA} (1+y)}{1+y^2} \leq \frac{e^{-y} (1+y)}{1+y^2} \underset{A \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$
 $\underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{y^2}\right)$ donc $\in L^1\left(\int_0^{+\infty}\right)$

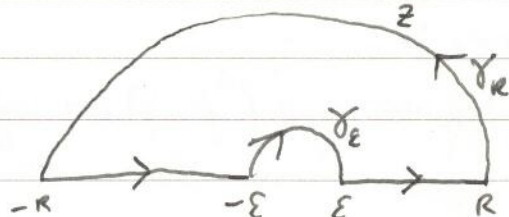
Par le théorème de convergence dominée, $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{\sin n}{n} dn = \int_0^{+\infty} \frac{\sin n}{n} dn = \frac{\pi}{2}$.

Démonstration 2 : Par l'analyse complexe dans le plan ou le demi-plan supérieur

Ici, on fait de la remarque : $\frac{\sin t}{t} = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2it}$. Donc pour $\varepsilon > 0$ et $R > 1$ on a :

$$2i \int_{\varepsilon}^R \frac{\sin t}{t} dt = \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{it}}{t} dt - \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{-it}}{t} dt = \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{it}}{t} dt - \int_{-\varepsilon}^{-R} \frac{e^{it}}{t} dt$$

Ainsi, en posant $f: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{e^{iz}}{z}$, et en intégrant sur $\gamma_{\varepsilon, R}$:



On obtient par le théorème intégral de Cauchy (car 0 seul pôle de $f \notin \text{int}(\gamma_{\varepsilon, R})$) :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\gamma_{\varepsilon, R}} f = \underbrace{\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{it}}{t} dt}_{= - \int_{-\varepsilon}^{-R} \frac{e^{it}}{t} dt} + \int_{\gamma_{\varepsilon}} f(z) dz + \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{it}}{t} dt + \int_{\gamma_R} f(z) dz \\ &= 2i \int_{\varepsilon}^R \frac{\sin t}{t} dt + \int_{\gamma_{\varepsilon}} f + \int_{\gamma_R} f \end{aligned}$$

On s'occupe d'abord de $\int_{\gamma_{\varepsilon}} f$:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_{\varepsilon}} f &= - \int_0^{\pi} \frac{e^{i\varepsilon e^{i\theta}}}{\varepsilon e^{i\theta}} i\varepsilon e^{i\theta} d\theta \quad \text{car } \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = - \int_{\varepsilon}^{-\varepsilon} \\ &= -i \int_0^{\pi} e^{i\varepsilon e^{i\theta}} d\theta \end{aligned}$$

• $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |e^{i\varepsilon e^{i\theta}}| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 1$, domination : $|e^{i\varepsilon e^{i\theta}}| \leq \| \theta \mapsto e^{i\varepsilon e^{i\theta}} \|_{\infty} \in L^1([0, \pi])$

Par théorème convergence dominée, $\int_{\gamma_{\varepsilon}} f \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -i \int_0^{\pi} d\theta = -i\pi$

Puis de $\int_{\gamma_R} f$:

$$\int_{\gamma_R} f = \int_0^\pi \frac{e^{iRe^{i\theta}}}{Re^{i\theta}} iRe^{i\theta} d\theta = \int_0^\pi e^{iRe^{i\theta}} d\theta$$

Et l'on a, $\forall \theta \in [0, \pi]$:

$$|e^{iRe^{i\theta}}| = |e^{iR(\cos\theta + i\sin\theta)}| = e^{-R\sin\theta} \leq e^{-R\sin\theta} \in L^1([0, \pi])$$

Par convergence dominée, $\int_{\gamma_R} f \xrightarrow[R \rightarrow \infty]{} 0$.

Finalement, quand $\varepsilon \rightarrow 0$ et $R \rightarrow \infty$ on obtient: $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

Démonstration 3: Par Fourier-Plancherel d'un Bernis, ou Daniel Li dans les exercices du chapitre III.

Soit $\xi \in \mathbb{R}$. Calculons la transformée de Fourier de $\Pi = \mathbb{1}_{[-1/2, 1/2]}$:

$$\mathcal{F}(\Pi)(\xi) = \int_{-1/2}^{1/2} e^{-2i\pi\xi t} dt = \left[\frac{e^{-2i\pi\xi t}}{-2i\pi\xi} \right]_{t=-1/2}^{t=1/2} = \frac{e^{-i\pi\xi} - e^{i\pi\xi}}{-2i\pi\xi} = \frac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi}.$$

Le but est d'appliquer le théorème d'isométrie de Fourier-Plancherel à $\text{sinc}(\pi \cdot)$

pour obtenir $1 = \|\Pi\|_{L^2}^2 = \|\text{sinc}(\pi \cdot)\|_{L^2}^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt$.

1) Montrons que $\text{sinc} \in L^2(\mathbb{R})$: à nouveau, $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ car prolongeable en 0 par $\text{sinc}(0) = 1$ (cf thm 1). Puis en $\pm\infty$ on a: $\left|\frac{\sin t}{t}\right|^2 \leq \frac{1}{t^2}$ donc $\text{sinc}(t) = O(1/t^2)$, donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt$ converge.

2) Calcul de $\|\text{sinc}(\pi \cdot)\|_{L^2}$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\pi t)}{(\pi t)^2} dt \stackrel{\text{paire}}{=} 2 \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(\pi t)}{(\pi t)^2} dt \stackrel{\sin^2 u = \frac{1 - \cos(2u)}{2}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(2\pi t)}{(\pi t)^2} dt$$

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2(\pi \xi)}{(\pi \xi)^2} d\xi \stackrel{\text{paire}}{=} 2 \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(\pi \xi)}{(\pi \xi)^2} d\xi \stackrel{u = \pi \xi}{=} \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(u)}{u^2} du \stackrel{\sin^2 u = \frac{1 - \cos(2u)}{2}}{=} \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(2u)}{2u^2} du$$

Puis l'on procède à une IPP :

$$\int uv' = [uv] - \int u'v \quad \text{avec} \quad u = \frac{1 - \cos(2u)}{2} \quad u' = \sin(2u)$$

$$v' = \frac{1}{v^2}$$

$$v = \frac{1}{u}$$

Qui nous donne :

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(2u)}{u^2} du = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\cos(2u) - 1}{u} \right]_0^{+\infty} + \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2u)}{u} du$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2u)}{u} du$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(v)}{v/2} \frac{dv}{2}$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(v)}{v} dv$$

$$\text{Ainsi, } 1 = \| \Pi \|_{L^2}^2 = \| F(\Pi) \|_{L^2}^2 = \| \sin(\Pi \cdot) \|_{L^2}^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(v)}{v} dv$$

Démonstration 4 : Étude de $\mathcal{L}(\text{sinc})$ la transformée de Laplace de sinc, on prouve sa continuité en 0. FGN Analyse 3p. 21h.

Notons $f: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$
 $(x, t) \longmapsto e^{-xt} \frac{\sin t}{t}$, fonction continue en les deux

variables. De plus, $\forall x > 0$, $t \mapsto f(x, t)$ est en $\mathcal{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ en $+\infty$ donc intégrable; et en $x=0$ par le théorème 1, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge. On peut ainsi définir :

$$F: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \quad (x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{+\infty} f(x, t) dt) \quad \begin{matrix} \text{transformée de} \\ \text{Laplace de sinc} \end{matrix}$$

But. Mq F est $\mathcal{C}^1$, calculer F' puis en primitivant obtenir une autre forme de F , montrer que c'est continue en 0 et obtenir $F(0)$.

i) F est $\mathcal{C}^1([0, +\infty[)$: Soit $a > 0$. Mq $F \in \mathcal{C}^1([a, +\infty[)$.

• $x \mapsto f(x, t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[\quad \forall t \in]0, +\infty[$.

• $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -t e^{-xt} \frac{\sin t}{t} = -e^{-xt} \sin t$, donc $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq e^{-at} t \in L^1([0, +\infty[)$

Ainsi, F est $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ et l'on a: $F'(u) = \int_0^{+\infty} -\sin t e^{-ut} dt \quad \forall u \in [a, +\infty[$
 et ce $\forall a > 0$, donc $F \in \mathcal{C}^1(]0, +\infty[)$. Calculons F' ; pour tout $u \in]0, +\infty[$ on a:

$$\begin{aligned} F'(u) &= - \int_0^{+\infty} \sin t e^{-ut} dt = - \int_0^{+\infty} \operatorname{Im}(e^{it} e^{-ut}) dt = - \operatorname{Im} \left(\int_0^{+\infty} e^{t(i-u)} dt \right) \\ &= - \operatorname{Im} \left(\left[\frac{e^{t(i-u)}}{i-u} \right]_0^{+\infty} \right) = - \operatorname{Im} \left(\frac{-1}{i-u} \right) = - \operatorname{Im} \left(\frac{-(i+u)}{1+u^2} \right) = \frac{-1}{1+u^2} \end{aligned}$$

ii) Puis en primitivant, on obtient:

$$F(u) = C - \arctan(u) \quad \forall u > 0, \text{ avec } C \in \mathbb{R} \text{ une constante.}$$

Montrons que $C = \frac{\pi}{2} \quad \forall u > 0$, on a:

$$|F(u)| = \left| \int_0^{+\infty} e^{-ut} \frac{\sin t}{t} dt \right| \leq \int_0^{+\infty} e^{-ut} \frac{|\sin t|}{t} dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-ut} \frac{e^{[0,1]}}{t} dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-ut} dt = \frac{1}{u} \xrightarrow{u \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{Donc } 0 = \lim_{u \rightarrow +\infty} F(u) = C - \lim_{u \rightarrow +\infty} \arctan u = C - \frac{\pi}{2}.$$

iii) Reste à montrer que F est continue en 0. Since $\notin L^1(\mathbb{R})$, on ne peut employer le théorème de continuité sous l'intégrale.

Nous avons deux problèmes de convergence: en 0 et en $+\infty$. On va donc étudier séparément $F_1(u) = \int_0^1 e^{-ut} \frac{\sin t}{t} dt$ et $F_2(u) = \int_1^{+\infty} e^{-ut} \frac{\sin t}{t} dt$, pour $u \in [0, +\infty[$.

F_1 : Comme $t \in]0, 1[$, on peut dominer $\frac{\partial}{\partial u}(u, t) = e^{-ut} \sin t$ par 1, et donc F_1 est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.

$$\text{F}_2: F_2(u) = \int_1^{+\infty} e^{-ut} \frac{\sin t}{t} dt = \operatorname{Im} \left(\int_1^{+\infty} \frac{e^{-ut} e^{it}}{t} dt \right) = \operatorname{Im} \left(\int_1^{+\infty} \frac{e^{t(i-u)}}{t} dt \right) = \operatorname{Im} \left(\overbrace{\int_1^{+\infty} \frac{e^{t(i-u)}}{t} dt}^{G(u)} \right)$$

$$\text{I'll use } \int_1^x \frac{e^{-(u-i)t}}{t} dt, \quad \int uv' = [uv] - \int u'v \text{ avec } u = \frac{1}{t} \quad u' = -\frac{1}{t^2}$$

$$\int_1^x \frac{e^{-(u-i)t}}{t} dt = \left[\frac{e^{-(u-i)t}}{t(i-u)} \right]_{t=1}^{t=x} + \frac{1}{i-u} \int_1^x \frac{e^{-(u-i)t}}{t^2} dt$$

$$v' = e^{-(u-i)t} \quad v = \frac{e^{-(u-i)t}}{-(u-i)}$$

$$= e^{-(u-i)t} \left(\frac{1}{t^2} \right) \text{ donc } L^1$$

$$\Rightarrow G(u) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-(u-i)t}}{t} dt = \underbrace{\frac{e^{i-iu}}{u-i}}_{\text{poles}} + \frac{1}{i-u} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-(u-i)t}}{t^2} dt \quad \text{donc } G \text{ est } \mathcal{C}^0 \text{ sur } [0, +\infty[$$

poles et domination

Finalement, F_2 est continue sur $[0, +\infty[$ donc $F = F_1 + F_2$ l'est aussi.

Ainsi, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = F(0) = \frac{\pi}{2}$.

Démonstration 5: On étudie cette fois $f = \mathcal{L}(t \mapsto \frac{1}{1+t^2})$ sur $\mathbb{R}_+$, on montre qu'elle est solution de l'équa diff $y'' + y = \frac{1}{n}$, ~~qui l'on résout~~ à laquelle on trouve une autre solution $\psi(u) = \int_u^{+\infty} \frac{\sin(t-u)}{t} dt$.

Posons $f: [0, +\infty[\times [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, fonction $\mathcal{C}^\infty$ en u et t
 $(u, t) \mapsto \frac{e^{-ut}}{1+t^2}$

et $|f(u, t)| \leq \frac{1}{1+t^2} \in L^1([0, +\infty[)$ donc l'on peut définir la transformée

de Laplace suivante: $\varphi(u) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ut}}{1+t^2} dt \quad \forall u \geq 0$.

#1: φ est $\mathcal{C}^\infty$ et solution de $y'' + y = \frac{1}{n}$. De plus, $\lim_{u \rightarrow +\infty} \varphi(u) = 0$

Pour $u > 0$: $\frac{\partial^k}{\partial u^k} f(u, t) = \frac{(-1)^k t^k e^{-ut}}{1+t^2}$. Soit $a > 0$, on va montrer sur

$[a, +\infty[$: $\left| \frac{\partial^k}{\partial u^k} f(u, t) \right| \leq \frac{e^{-at} t^k}{1+t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right) \quad \forall t \in]0, +\infty[\text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^*.$

Ainsi, $\varphi \in \mathcal{C}^k([a, +\infty[) \quad \forall a > 0$, donc $\varphi \in \mathcal{C}^k([0, +\infty[)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

$\forall u > 0$: $\varphi'(u) = \int_0^{+\infty} \frac{-t e^{-ut}}{1+t^2} dt$ donc, pour tout $u > 0$:

$$\varphi(u) + \varphi''(u) = \int_0^{+\infty} \frac{(1+t^2)e^{-ut}}{1+t^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{-ut} dt = \frac{1}{u}$$

Enfin, comme $\varphi'' \geq 0$ on a: $0 \leq \varphi \leq \varphi + \varphi'' = \frac{1}{u} \xrightarrow{u \rightarrow +\infty} 0$
 D'où $\lim_{u \rightarrow +\infty} \varphi(u) = 0$.

#2: Posons $\psi(u) = \int_u^{+\infty} \frac{\sin(t-u)}{t} dt \quad \forall u \geq 0$. Comme $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-it}}{t} dt$ converge,

on peut écrire:

$$\psi(u) = \int_u^{+\infty} \frac{\sin(t-u)}{t} dt = \cos u \int_u^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt - \sin u \int_u^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$$

Ψ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ car $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ et $t \mapsto \frac{\cos t}{t}$ le sont par le théorème fondamental de l'analyse. De plus on a, pour tout $n > 0$,

$$\begin{aligned}\Psi'(n) &= -\cos n \frac{\sin n}{n} - \sin n \int_n^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt + \sin n \frac{\cos n}{n} - \cos n \int_n^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt \\ &= -\sin n \int_n^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt - \cos n \int_n^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi''(n) &= -\cos n \int_n^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt + \frac{\sin^2 n}{n} - \sin n \int_n^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt + \frac{\cos^2 n}{n} \\ &= \frac{1}{n} - \Psi(n)\end{aligned}$$

Ainsi, $\Psi''(n) + \Psi(n) = \frac{1}{n} \quad \forall n > 0.$

#3: l'équation différentielle homogène $y'' + y = 0$

admet comme solutions $t \mapsto \lambda \cos t + \mu \sin t$ que l'on peut ré-écrire sous la forme $t \mapsto A \cos(t - \theta)$ car :

$$A \cos(t - \theta) = A(\cos t \cos \theta + \sin t \sin \theta) = (A \cos \theta) \cos t + (A \sin \theta) \sin t$$

pour $\begin{cases} \lambda = A \cos \theta \\ \mu = A \sin \theta \end{cases}$ et l'on conserve bien 2 degrés de liberté.

Ainsi, par le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, on a :

$$\exists A \in \mathbb{R}, \theta \in \mathbb{R}, \quad \Psi(n) = A \cos(n - \theta) + \Psi(n).$$

$A = 0$: en effet, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \Psi(n) = 0$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_n^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_n^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = 0$

et donc, étant donné que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \Psi(n) = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} A \cos(n - \theta) = 0$, et donc $A = 0$.

D'où $\Psi(n) = \Psi(n) \quad \forall n > 0.$

#4, limite en 0:

$$* \gamma(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = [\arctan t]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} \text{ et } \gamma \text{ est continue en } 0 \text{ donc:}$$

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{u \rightarrow 0} \gamma(u) = \lim_{u \rightarrow 0} \gamma(u)$$

$$* \lim_{u \rightarrow 0} \gamma(u) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt,$$

$$\forall u > 0, \text{ on a: } \gamma(u) = \cos u \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt}_{\xrightarrow{u \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt} - \sin u \underbrace{\int_u^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt}_{\xrightarrow{u \rightarrow 0} 0 \text{ car } \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt \text{ converge}} \\ \text{et } \sin u \xrightarrow{u \rightarrow 0} 0.$$

$$\text{Finalement, } \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

