Endomorphismes semi-simples

Définition : Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie. On dit que $f \in \mathcal{L}(E)$ est semi-simple si pour tout sous-espace vectoriel F de E stable par f, il existe un supplémentaire S de F stable par f.

Théorème : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On note Π_f son polynôme minimal, que l'on écrit sous la forme $\Pi_f = M_1^{\alpha_1} \dots M_r^{\alpha_r}$, où chaque M_i est un polynôme irréductible unitaire de $K[X]$. L'endomorphisme f est semi-simple si et seulement si pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $\alpha_i = 1$.

Démonstration :

• Soit F un sous-espace vectoriel stable par f. On va montrer que $F = \bigoplus_{i=1}^{n} [\ker M_i^{\alpha_i}(f)) \cap F]$.

Pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, on pose $F_i = \ker M_i^{\alpha_i}(f)$. Par lemme de décomposition des noyaux, on a $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_r$. Pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, on note p_i la projection sur F_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} F_j$, qui est un polynôme en f. Comme F est stable par f, on a donc $p_i(F) \subset F$ pour tout i. On a aussi $p_i(F) \subset p_i(E) = F_i$, donc $p_i(F) \subset F_i \cap F$ pour tout i.

Or, $id_E = p_1 + \dots + p_r$, donc $F \subset p_1(F) + \dots + p_r(F) = p_1(F) \oplus \dots \oplus p_r(F) \subset (F_1 \cap F) \oplus \dots \oplus (F_r \cap F)$.

L'inclusion réciproque découle de $F_i \cap F \subset F$ pour tout i.

Donc $F = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i \cap F$.

• On suppose Π_f irréductible. On veut montrer que f est semi-simple.

Soit F un sous-espace vectoriel stable par f. On va construire un supplémentaire S de F qui soit f-stable. Si $F = E$, on prend $S = \{0\}$. On suppose donc $F \neq E$.

Soit $x_1 \in E \setminus F$. On pose $E_{x_1} = \{ P(f)(x_1) \,/\, P \in K[X] \}$, qui est un sous-espace f-stable.

On va montrer que E_{x_1} et F sont en somme directe.

Soit $I_{x_1} = \{ P \in K[X] \,/\, P(f)(x_1) = 0 \}$, qui est un idéal de $K[X]$, non nul car contenant

Π_f. Il existe donc un polynôme unitaire Π_{x_1} tel que $I_{x_1} = (\Pi_{x_1})$.

Comme $\Pi_f \in I_{x_1}$, le polynôme Π_{x_1} divise Π_f. Mais Π_f est irréductible et Π_{x_1} est non inversible, donc $\Pi_{x_1} = \Pi_f$. En particulier, Π_{x_1} est irréductible.

Soit $y \in E_{x_1} \cap F$. Il existe un polynôme $P \in K[X]$ tel que $y = P(f)(x_1)$.
Si $y \neq 0$, alors $P \notin I_{x_1} = (\Pi_{x_1})$, donc Π_{x_1} ne divise pas P. Comme Π_{x_1} est irréductible, il est alors premier à P. Par théorème de Bézout, il existe donc $U, V \in K[X]$ tels que l'on ait $UP + V\Pi_{x_1} = 1$. On a alors :

$$x_1 = U(f) \circ P(f)(x_1) + V(f) \circ \Pi_{x_1}(f)(x_1) = U(f)(y)$$

Or $y \in F$ et F est stable par f, donc $x_1 \in F$, ce qui est absurde.

Si $F \oplus E_{x_1} = E$, on a fini. Sinon, on prend $x_2 \in E \setminus (F \oplus E_{x_1})$ et on recommence.
Comme E est de dimension finie, on termine en un nombre fini d'étapes, ce qui permet de trouver $x_1, \dots, x_k \in E$ tels que $E = F \oplus E_{x_1} \oplus \dots \oplus E_{x_k}$, et

$S = E_{x_1} \oplus \dots \oplus E_{x_k}$ convient.

• On passe à présent à la preuve du théorème.

- On suppose f semi-simple. Par l'absurde, on suppose qu'il existe i tel que $\alpha_i \geq 2$.
Si $M = M_i$, il existe $N \in K[X]$ tel que $\Pi_f = M^2N$. On considère $F = \ker M(f)$, qui est un sous-espace stable par f. Comme f est semi-simple, il existe un supplémentaire S de F stable par f. On va montrer que $MN(f)$ s'annule sur S.
Si $x \in S$, on a $MN(f)(x) \in F$, car $M(f) \circ MN(f)(x) = M^2N(f)(x) = \Pi_f(f)(x) = 0$,

et $MN(f)(x) \in S$, car S est f-stable. Donc $MN(f)(x) \in F \cap S = \{0\}$, ce qui donne $MN(f)(x) = 0$. Par suite, $MN(f)$ s'annule sur S.
De plus, si $y \in F = \ker M(f)$, on a $MN(f)(y) = NM(f)(y) = N(M(f)(y)) = 0$.
Comme $F \oplus S = E$, on a $MN(f) = 0$, ce qui contredit la minimalité de Π_f.

- On suppose à présent que tous les α_i sont égaux à 1.

Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par f. Pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, on pose $F_i = \ker M_i(f)$. On a, par le premier point, $F = \bigoplus_{i=1}^{r} [F \cap F_i]$.

Pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, F_i est stable par f, et on note $f_i \in \mathcal{L}(F_i)$ la restriction de f à F_i.

On a $M_i(f_i) = 0$, donc, par irréductibilité de M_i, le polynôme minimal de f_i est M_i.

Le deuxième point permet alors d'affirmer que f_i est semi-simple.

Comme $F \cap F_i$ est stable par f_i, on fixe un supplémentaire S_i de $F \cap F_i$ dans F_i stable par f_i. On pose alors $S = S_1 \oplus \dots \oplus S_r$.

On a $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_r = \bigoplus_{i=1}^{r} [(F_i \cap F) \oplus S_i] = [\bigoplus_{i=1}^{r} (F_i \cap F)] \oplus [\bigoplus_{i=1}^{r} S_i] = F \oplus S$,

et S est stable par f. L'endomorphisme f est donc semi-simple.