P. Maurer

ENS Rennes

Référence : Gourdon, Analyse.

Fortement inspiré du travail de Florent Lemonnier.

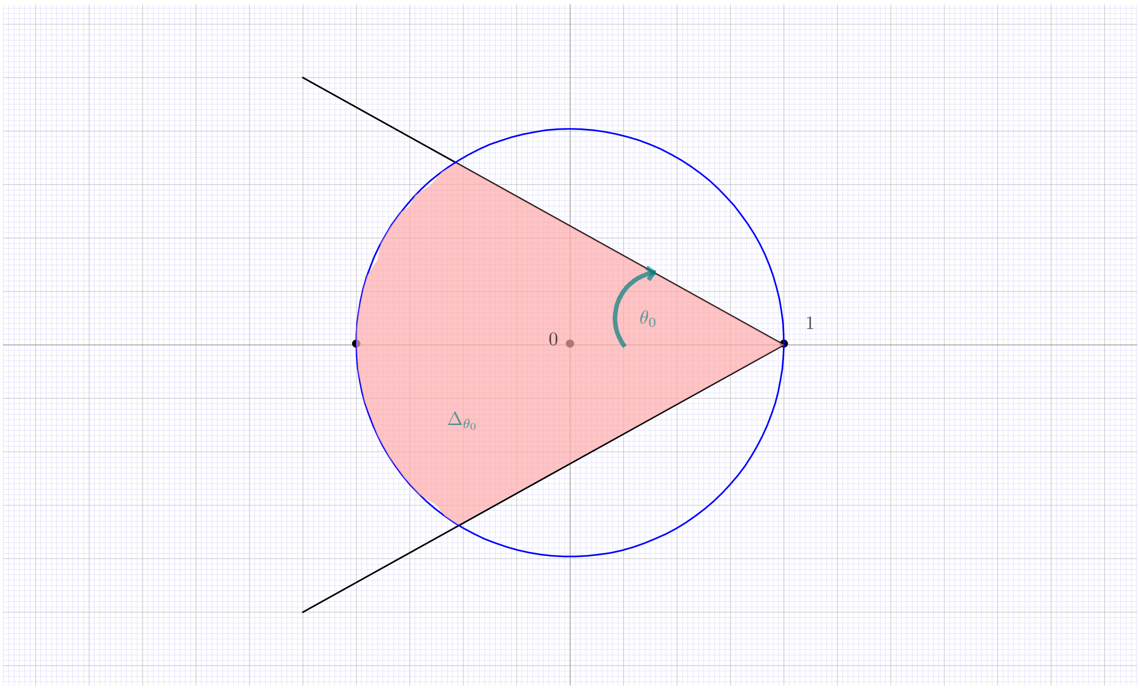
Recasages : *230, 241, 243.*

Théorèmes d'Abel angulaire et taubérien faible

Théorème 1. *(Abel angulaire)*
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \geq 1$ telle que $\sum a_n$ converge. On note f la somme de cette série entière sur le disque unité. On fixe $\theta_0 \in [0, \pi/2[$ et on pose

$$\Delta_{\theta_0} := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1 \text{ et } \exists \rho > 0 \quad \exists \theta \in [-\theta_0, \theta_0],\ z = 1 - \rho e^{i\theta}\}.$$

Alors on a $\lim\limits_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$.



Démonstration.

Pour $N \in \mathbb{N}$, on pose $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$, $S_N = \sum\limits_{n=0}^{N} a_n$ et $R_N = S - S_N$. On se donne $z \in \mathbb{C}^*$ avec $|z| < 1$.

Etape 1 : Montrons que $f(z) - S = (z-1) \sum\limits_{n=1}^{+\infty} R_n z^n$.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Remarquons que $R_{N-1} - R_N = S_N - S_{N-1} = a_N$.

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} a_n z^n - S_N &= \sum_{n=0}^{N} a_n(z^n-1)\\
&= \sum_{n=1}^{N} (R_{n-1}-R_n)(z^n-1) + a_0 - a_0\\
&= \sum_{n=0}^{N-1} R_n\,(z^{n+1}-1) - \sum_{n=1}^{N} R_n(z^n-1)\\
&= \sum_{n=0}^{N-1} R_n(z^{n+1}-z^n) - 0\,R_0 - R_N\,(z^N-1)\\
&= (z-1)\sum_{n=0}^{N-1} R_n z^n - R_N(z^N-1).
\end{aligned}$$

Par passage à la limite quand $N \to +\infty$, on en déduit le résultat.

Etape 2 : On cherche à majorer $|f(z)-s|$.

On se donne $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $|R_n| \leq \varepsilon$.

$$\begin{aligned}
|f(z)-s| &\leq |z-1|\sum_{n=0}^{+\infty} |R_n|\,|z|^n\\
&= |z-1|\sum_{n=0}^{N} |R_n|\,|z|^n + |z-1| \sum_{n=N+1}^{+\infty} \varepsilon\,|z|^n\\
&\leq |z-1|\sum_{n=0}^{N} |R_n| + |z-1|\cdot\varepsilon\cdot\left(\frac{1}{1-|z|} - \frac{1-|z|^{n+1}}{1-|z|}\right)\\
&= |z-1|\sum_{n=0}^{N} |R_n| + |z|^{n+1}\,\varepsilon\,\frac{|z-1|}{1-|z|}\\
&\leq |z-1|\sum_{n=0}^{N} |R_n| + \varepsilon\,\frac{|z-1|}{1-|z|}.
\end{aligned}$$

Etape 3 : On majore $\dfrac{|z-1|}{1-|z|}$ pour $z \in \Delta_{\theta_0}$.

On se donne $\rho > 0$ et $|\theta| \leq \theta_0$. Pour $z = 1 - \rho e^{i\theta}$, on a

$$|z|^2 = (1-\rho e^{i\theta})(1-\rho e^{-i\theta}) = 1 - 2\,\rho\cos(\theta) + \rho^2.$$

Aussi, pour $\rho \leq \cos(\theta_0)$, il vient

$$\begin{aligned}
\frac{|z-1|}{1-|z|} &= (1+|z|)\cdot\frac{|z-1|}{1-|z|^2}\\
&\leq 2\,\frac{\rho}{2\,\rho\cos(\theta)-\rho^2}\\
&\leq \frac{2}{2\cos(\theta_0)-\rho} \quad \text{(car } |\theta| \leq \theta_0 \text{ et } \theta_0 \in [0,\pi/2[)\\
&\leq \frac{2}{\cos(\theta_0)} \quad \text{(car } \rho \leq \cos(\theta_0)).
\end{aligned}$$

Etape 4 : Conclusion.

On se donne $\alpha > 0$ tel que $\alpha \sum_{n=0}^{N} |R_n| < \varepsilon$. Un tel α dépend seulement de ε puisque N dépend aussi de ε. Pour $|z-1| = \rho \leq \min\{\alpha, \cos(\theta_0)\}$, on a alors d'après les étapes 2 et 3 :

$$|f(z) - S| \;\leq\; \varepsilon\left(1 + \frac{2}{\cos(\theta_0)}\right).$$

On en déduit que $\lim\limits_{\substack{z\to 1\\ z\in\Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$. □

Théorème 2. *(Théorème taubérien faible)*
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \geq 1$, et f sa somme sur $\mathcal{D}(0,1)$. On suppose qu'il existe $S \in \mathbb{C}$ tel que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = S$, et que de plus, $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$. Alors la série $\sum a_n$ converge et $S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Démonstration.

Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n$, et on se donne $x \in]0,1[$.

Etape 1 : On cherche à majorer $|f(x) - S_N|$.
Par définition, on a

$$\begin{aligned} S_N - f(x) &= \sum_{n=0}^{N} a_n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{N} a_n(1-x^n) - \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n x^n. \end{aligned}$$

Par ailleurs, la formule de Bernouilli (ou juste le calcul d'une somme géométrique) donne

$$\begin{aligned} 1 - x^n &= (1-x)\sum_{k=0}^{n-1} x^k \\ &\leq (1-x)\, n. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$|S_N - f(x)| \;\leq\; (1-x)\sum_{n=0}^{N} n\,|a_n| + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{n}{N}|a_n|\,x^n. \quad \left(\text{avec } \frac{n}{N} \geq 1\right)$$

Comme $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, la suite $(n\,|a_n|)_{n\geq 0}$ converge vers zéro. En particulier, elle est bornée par $M \geq 0$, et on a

$$\begin{aligned} |S_N - f(x)| &\leq (1-x)\,NM + \sup_{n\geq N+1}(n\,|a_n|)\cdot\frac{1}{N}\frac{x^{N+1}}{1-x} \\ &\leq (1-x)\,NM + \sup_{n\geq N+1}(n\,|a_n|)\cdot\frac{1}{N(1-x)}. \end{aligned}$$

Etape 2 : On se donne $1>\varepsilon>0$ et $N_0\in\mathbb{N}$ tel que $\sup\limits_{n\geq N_0+1}(n\,|a_n|)\leq\varepsilon^2$.[1]

D'après le résultat de l'étape 1, en posant, pour $N\in\mathbb{N}^*$, $x=1-\dfrac{\varepsilon}{N}$ on obtient

$$\begin{aligned}\left|S_N-f\Big(1-\frac{\varepsilon}{N}\Big)\right| &\leq \varepsilon\,M+\sup_{n\geq N+1}(n\,|a_n|)\cdot\frac{1}{\varepsilon}\\ &\leq \varepsilon\,(M+1).\end{aligned}$$

Par hypothèse, on a $\lim\limits_{N\to+\infty} f\Big(1-\dfrac{\varepsilon}{N}\Big)=S$, donc il existe $N_1\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $N\geq N_1$, on ait

$$\left|f\Big(1-\frac{\varepsilon}{N}\Big)-S\right| \leq \varepsilon.$$

Aussi, pour $N\geq\max(N_0,N_1)$, une inégalité triangulaire donne

$$\begin{aligned}|S_N-S| &\leq \left|S_N-f\Big(1-\frac{\varepsilon}{N}\Big)\right|+\left|f\Big(1-\frac{\varepsilon}{N}\Big)-S\right|\\ &\leq \varepsilon(M+1).\end{aligned}$$

On en déduit que $\lim\limits_{N\to+\infty} S_N=S$, et ceci conclut la preuve. □

1. L'existence de N_0 est assurée par le fait que $\limsup\limits_{n\to+\infty}(n\,|a_n|)=\lim\limits_{n\to+\infty}(n\,|a_n|)=0$.