action du groupe modulaire

Thm: Soient $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans $G = PSL_2(\mathbb{Z})$

Soit $D = \{ z \in H \ / \ |z| \geq 1 \text{ et } |Re(z)| \leq \frac{1}{2} \}$

où $H = \{ z \in \mathbb{C} \ / \ Im\, z > 0 \}$

alors 1] $\forall z \in H, \exists g \in G, \ g.z \in D$

2] si z_1 et $z_2 \in \mathring{D}$, congrus modulo G. Alors $z = z'$.

3] $\langle S, T \rangle = G$

1] Soit $G_0 = \langle S, T \rangle$. Soit $z \in H$

si $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on calcule : $Im(g.z) = \dfrac{Im\, z}{|cz+d|^2}$

Il n'y a qu'un nb fini de $(c,d) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $|cz+d|^2 \leq 1$ (et $(0,1)$ convient). On en déduit qu'il existe $g \in G_0$ tel que $Im(gz)$ soit maximum

- Soit $n \in \mathbb{Z}$ tq $|Re(T^n g z)| \leq \frac{1}{2}$ et soit $g_0 = T^n g$

$g_0 z \in D$: en effet $|Re(g_0 z)| \leq \frac{1}{2}$, et si on avait $|g_0 z| < 1$, $S g_0 z = \dfrac{-1}{g_0 z}$ a une partie imaginaire strictement plus grande que celle de $g_0 z$, ~~d'où le résultat~~ ce qui contredit la ~~minimale~~ maximalité de $Im(gz) = Im(g_0 z)$.

2) Soient $z_1, z_2 \in \mathring{D}$ et $g \in G$, $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $g z_1 = z_2$.

On peut supposer que $Im(g z_1) \geq Im\, z_1$, ie $|c z_1 + d| \leq 1$.

On note $z_1 = z$. Montrons que $g = id$.

$$|cz+d|^2 = c^2 |z|^2 + d^2 + 2 Re(z) c.d \underset{(z \in D)}{\geq} c^2 + d^2 - |cd| = (|c| - |d|)^2 + |cd|$$

- si $c \neq 0$, comme $z \in \mathring{D}$, $|z| > 1$ et l'inégalité ci-dessus est stricte et finalement $|cz+d|^2 > 1$: absurde.

- ainsi $c=0$ mais $ad-bc=1$ donc $ad=1$
puis $a=d=\pm 1$

Ainsi g est une translation par un entier,
mais $\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Re}(gz)$ sont dans $]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}[$
ainsi $b=0$ et $g=id$.

3) Soit $g \in G$, et $z \in \mathring{D}$. Posons $z_0 = g.z$.
$\rightsquigarrow$ via 1, $\exists\, g_0 \in G_0$, $g_0 z_0 \in D$ $\quad g_0 z_0 = g_0 g z$

l'application $z \longmapsto g_0 g z$ est ouverte, ainsi
quitte à modifier z, on peut supposer $g_0 g z \in \mathring{D}$
$\rightsquigarrow$ via 2, $g_0 g = id$ et $g \in G_0$

Rq: $z \longmapsto g_0 g z$ est ouverte car holomorphe non
constante (sur un ouvert connexe). en fait elle
est C^∞ et son inverse aussi.