leçons:
122 : Anneaux principaux
142 : Algèbre des polynômes à plusieurs variables.

$\mathbb{C}[X,Y]/(X^2+Y^2-1)$ est principal

51

Références :
Francinou-Gianella "Exercices de mathématiques pour l'agrégation" Algèbre 1

Thm : $\mathbb{C}[X,Y]/(X^2+Y^2-1)$ est principal

preuve : ① MQ $\mathbb{C}[X,Y]/(X^2+Y^2-1) \simeq \mathbb{C}[U,V]/(UV-1)$ en tant que $\mathbb{C}$-algèbres

- $\mathbb{C}[X,Y]/(X^2+Y^2-1)$ est une $\mathbb{C}$-algèbre commutative donc par propriété universelle il existe un morphisme d'algèbres $\varphi : \begin{cases} \mathbb{C}[U,V] \longrightarrow \mathbb{C}[X,Y]/(X^2+Y^2-1) \\ U \longmapsto \overline{X+iY} \\ V \longmapsto \overline{X-iY} \end{cases}$

$$\varphi(UV-1) = \varphi(UV) - \varphi(1) = \overline{X^2+Y^2} - \overline{1} = \overline{0}$$

donc $(UV-1) \subset \ker\varphi$ et φ se factorise en φ, $\mathbb{C}[U,V]/(UV-1) \rightarrow \mathbb{C}[X,Y]/(X^2+Y^2-1)$

- De même, il existe $\psi : \begin{cases} \mathbb{C}[X,Y]/(X^2+Y^2-1) \longrightarrow \mathbb{C}[U,V]/(UV-1) \\ \overline{X} \longmapsto \frac{1}{2}(\overline{U}+\overline{V}) \\ \overline{Y} \longmapsto \frac{1}{2i}(\overline{U}-\overline{V}) \end{cases}$ morphisme d'algèbres.

- On vérifie que φ et ψ sont inverses l'une de l'autre. D'où l'isomorphisme.

② On note $\mathbb{C}[U,\frac{1}{U}]$ la sous-algèbre de $\mathbb{C}(U)$ engendrée par U et $\frac{1}{U}$.
MQ $\mathbb{C}[U,\frac{1}{U}] \simeq \mathbb{C}[U,V]/(UV-1)$ en tant que $\mathbb{C}$-algèbres.

- $\mathbb{C}[U,\frac{1}{U}]$ est une $\mathbb{C}$-algèbre commutative donc par propriété universelle il existe un morphisme d'algèbres $f : \begin{cases} \mathbb{C}[U,V] \longrightarrow \mathbb{C}[U,\frac{1}{U}] \\ U \longmapsto U \\ V \longmapsto \frac{1}{U} \end{cases}$

f se factorise en $f : \begin{cases} \mathbb{C}[U,V]/(UV-1) \longrightarrow \mathbb{C}[U,\frac{1}{U}] \\ \overline{U} \longmapsto U \\ \overline{V} \longmapsto \frac{1}{U} \end{cases}$

- MQ f est l'isomorphisme recherché :

$\mathbb{C}[U,\frac{1}{U}] = \{ P(U) + Q(\frac{1}{U}) \mid P \in \mathbb{C}[X], Q \in \mathbb{C}[X], \operatorname{val} Q \geq 1 \}$ cette écriture est unique.

$\mathbb{C}[U,V]/(UV-1) = \{ P(\overline{U}) + Q(\overline{V}) \mid P \in \mathbb{C}[X], Q \in \mathbb{C}[X], \operatorname{val} Q \geq 1 \}$ cette écriture est unique.

$$f(P(\overline{U}) + Q(\overline{V})) \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ morphisme} \\ \text{d'algèbres}}}{=} P(f(\overline{U})) + Q(f(\overline{V})) = P(U) + Q\left(\frac{1}{U}\right)$$

d'où la bijectivité de f.

f morphisme bijectif donc f isomorphisme.

③ <u>lemme</u> : Soient A, B deux anneaux intègres, commutatifs, unitaires tels que $A \subset B \subset \mathrm{Frac}(A)$.
Si A est principal, alors B aussi.

<u>preuve du lemme</u> :

Soit I un idéal de B.

$I \cap A$ est un idéal de A donc $\exists a \in A \mid I \cap A = aA$

MQ $I = aB$

- $a \in I \cap A \subset I$ donc $a \in I$ donc $aB \subset I$
- Soit $x \in I$.

$\exists (p,q) \in A \times (A \setminus \{0\}) \mid p \wedge q = 1$ et $x = p/q$

$p = qx \in A \cap I = aA$ donc $\exists y \in A \mid p = ay$

D'où $x = ay\frac{1}{q}$

MQ $\frac{1}{q} \in B$, on aura alors $x \in aB$

$p \wedge q = 1 \Rightarrow \exists (u,v) \in A^2 \quad up + vq = 1$

D'où $\underbrace{u}_{\in A}\underbrace{\frac{p}{q}}_{\in B} + \underbrace{v}_{\in A} = \frac{1}{q} \in B$

Donc $I \subset aB$.

④ <u>Fin de la preuve</u> :

On a $\mathbb{C}[u] \subset \mathbb{C}[u, \frac{1}{u}] \subset \mathbb{C}(u)$

et $\mathbb{C}[u]$ est principal donc $\mathbb{C}[u, \frac{1}{u}]$ est principal par ③.

D'où $\mathbb{C}[X,Y]/(X^2+Y^2-1)$ est principal par ① et ②.

Remarques :

- $\mathbb{R}[X,Y]/(X^2+Y^2-1)$ n'est pas factoriel. (cf Francinou-Gianella "Exercices de Mathématiques pour l'agreg" Algèbre 1.)
- $\mathbb{C}[X,Y]/(X^2+Y^2-1)$ est en fait même euclidien (même référence)