leçons
155 : Endom^{ts} diag^{bles} en dim finie
156 : Exponentielle de matrices
158 : Matrices symétriques réelles et matrices hermitiennes
160 : Endom^{ts} remarquables d'un espace vectoriel euclidien

$\exp : S_n(\mathbb{R}) \to S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme (36)

Références :
Caldero et Germoni
" Histoires hédonistes de groupes et de géométrie "

Thm : L'application $\exp : S_n(\mathbb{R}) \to S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme

preuve :

(1) Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$. Il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ tq $S = P \operatorname{diag}(\lambda_i) P^{-1}$ ($\lambda_i \in \mathbb{R}$)

Alors $\exp(S) = P \exp(\operatorname{diag}(\lambda_i)) P^{-1} = P \operatorname{diag}(e^{\lambda_i}) P^{-1} \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ ($P^{-1} = {}^tP$)

$\exp : S_n(\mathbb{R}) \to S_n^{++}(\mathbb{R})$ est donc bien définie et continue car c'est la restriction d'une application continue.

(2) Surjectivité :

Soit $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ $B = P \operatorname{diag}(\mu_i) P^{-1}$ ($\mu_i > 0$)

On pose $A = P \operatorname{diag}(\ln \mu_i) P^{-1} \in S_n(\mathbb{R})$

On a $\exp A = B$.

(3) Injectivité :

Soient $A, A' \in S_n(\mathbb{R})$ telles que $\exp A = \exp A'$. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les vp de A

Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme interpolateur de Lagrange tel que $Q(e^{\lambda_i}) = \lambda_i$ $\forall i$

$\exp A'$ est un polynôme en A' donc A' commute à $Q(\exp A') = Q(\exp A) = A$.

A' et A sont donc codiagonalisable et par injectivité de $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ $A = A'$

(4) Continuité de l'inverse : (par critère séquentiel dans un espace métrique)

Soit $(A_p) \subset S_n(\mathbb{R})$. On pose $B_p = \exp A_p$

Supposons que $B_p \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et montrons que $A_p \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} A \in S_n(\mathbb{R})$ où $\exp A = B$

La suite (B_p) converge donc est bornée pour $|||\cdot|||_2$.

$\begin{cases} GL_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R}) \\ M \mapsto M^{-1} \end{cases}$ est continue et $B \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{R})$ donc $B_p^{-1} \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} B^{-1}$

Ainsi (B_p^{-1}) est également bornée pour $|||\cdot|||_2$

Or, pour tout $M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, on a

$$|||M|||_2 = \sqrt{\rho({}^tMM)} = \sqrt{\rho(M^2)} = \rho(M) = \max_{\lambda \in \operatorname{Sp} M} |\lambda| = \max_{\lambda \in \operatorname{Sp} M} \lambda$$

On en déduit que :

$$\exists C > 0 \quad \forall p \geq 0 \quad \forall \lambda \in \text{Spec } B_p \quad \lambda \leq C$$

$$\exists C' > 0 \quad \forall p \geq 0 \quad \forall \lambda \in \text{Spec } B_p^{-1} \quad \lambda \leq (C')^{-1}$$

Mais $\text{Spec } B_p^{-1} = \left\{ \frac{1}{\lambda} \mid \lambda \in \text{Spec } B_p \right\} \ \forall p$

donc $\forall p \geq 0 \quad \forall \lambda \in \text{Spec } B_p \ 0 < C' \leq \lambda \leq C$

$K = [C', C]$ est un compact et les valeurs propres des A_p sont contenues dans le compact $[\ln C', \ln C] \subset \mathbb{R}$.

On en déduit que la suite (A_p) est bornée pour $\|\!|\cdot|\!\|_2$

Il reste à montrer que l'unique valeur d'adhérence de (A_p) est A.

Soit $(A_{\varphi(p)})$ une suite extraite de (A_p) qui converge vers $M \in S_n(\mathbb{R})$

$$\forall p \geq 0 \quad \exp(A_{\varphi(p)}) = B_{\varphi(p)}$$

exp est continue sur $S_n(\mathbb{R})$ donc, en passant à la limite, $\exp M = B = \exp A$

Par 3 $A, M \in S_n(\mathbb{R})$ donc $A = M$.

Synthèse : la suite (A_p) est bornée et admet pour unique valeur d'adhérence la matrice A donc (A_p) converge vers A.