leçons:
158: Matrices symétriques réelles
171: Formes quadratiques réelles.
170: Formes quadratiques.
214: Théorème d'inversion locale
215: Applications différentiables
218: Applications des formules de Taylor.

Lemme de Morse

6

Références:
Rouvière p-344

Thm: Soit $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^k$ avec $k \geq 3$ tq $f(0)=0$, $df(0)=0$, $d^2f(0)$ non dégénérée de signature (p,q). On note Q_0 la matrice associée à $d^2f(0)$.
Alors $\exists\, \varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ $\mathcal{C}^{k-2}$ difféo tq $f(x) = \frac{1}{2} d^2f(0).(\varphi(x), \varphi(x))$
et ~~il~~ existe un système de coordonnées locales dans lequel $f(x) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_n^2$

preuve:

① Formule de Taylor avec reste intégral : $f(x) = \int_0^1 (1-t)\, d^2f(tx).(x,x)\,dt$

On note $M(x)$ la matrice associée à $d^2f(x)$

On a $f(x) = \int_0^1 (1-t)\, {}^t x\, M(tx)\, x\, dt = {}^t x\, Q(x)\, x$ avec $Q(x) = \int_0^1 (1-t) M(tx)\,dt$

$Q : \mathbb{R}^n \to S_n(\mathbb{R})$ est $\mathcal{C}^{k-2}$ et $Q(0) = \frac{1}{2} Q_0$

② On pose $h: \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \xrightarrow{\mathcal{C}^\infty} S_n(\mathbb{R}) \\ A \longmapsto \frac{1}{2}\, {}^t A\, Q_0\, A \end{cases}$

$dh(Id).B = {}^t B \frac{Q_0}{2} + \frac{Q_0}{2} B$ $\quad$ $\ker dh(Id) = Q_0^{-1} \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$

On pose $H = Q_0^{-1} S_n(\mathbb{R})$, $dh(Id)_{|H}$ est bijective de H sur $S_n(\mathbb{R})$

On pose $\Theta : \begin{cases} \mathbb{R}^n \times H \xrightarrow{\mathcal{C}^{k-2}} S_n(\mathbb{R}) \\ (x, A) \longmapsto Q(x) - {}^t A \frac{Q_0}{2} A \end{cases}$ $\quad$ $\Theta(0, Id) = 0$ et $d_A\Theta(0, Id) : H \to S_n(\mathbb{R})$ bijective

Par le théorème des fonctions implicites, il existe $\begin{cases} V_1 \text{ un voisinage de } 0 \text{ dans } \mathbb{R}^n \\ V_2 \text{ un voisinage de } Id \text{ dans } H \\ B : V_1 \to V_2 \ \mathcal{C}^{k-2} \\ B(0) = Id \end{cases}$

tq $\forall (x,A) \in V_1 \times V_2$ $\quad \Theta(x,A) = 0 \iff A = B(x)$

Donc $\forall x \in V_1$ $\quad Q(x) = {}^t B(x) \frac{Q_0}{2} B(x)$

$\forall x \in V_1$ $\quad f(x) = {}^t (B(x)x) \frac{Q_0}{2} B(x) x$

③ On pose $\varphi : \begin{cases} V_1 \to \mathbb{R}^n \\ x \mapsto B(x)\,x \end{cases}$

$$h \in V_1, \quad \varphi(h) = B(h)\,h = (B(0) + dB(0).h + \|h\|\,\varepsilon(h)).h$$
$$= B(0).h + \underbrace{(dB(0).h).h + (\|h\|\,\varepsilon(h)).h}_{= o(\|h\|)}$$

donc $d\varphi(0) = B(0) = Id$

Par le théorème d'inversion locale, $\exists\, V$ ouvert $\subset V_1$, voisinage de 0 tq $\varphi(V)$ est ouvert et $\varphi_{|V} : V \to \varphi(V)$ est un $\mathcal{C}^{k-2}$ difféomorphisme.

$$\forall x \in V \quad f(x) = {}^t\varphi(x)\, \frac{Q_0}{2}\, \varphi(x)$$
$$= {}^t(\varphi(x))\, \frac{Q_0}{2}\, \varphi(x)$$

④ Q_0 est non dégénérée de signature (p,q) donc $\exists\, P \in GL_n(\mathbb{R})$ et A diagonale telle que $Q_0 = {}^tPAP$. $A = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}$ $\updownarrow p$, $\updownarrow q = n-p$

$$\forall x \in V \quad f(x) = {}^t\left(P \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi(x)\right) A \left(P \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi(x)\right)$$

On pose $\psi : \begin{cases} V \to \mathbb{R}^n \\ x \mapsto \frac{P}{\sqrt{2}} \varphi(x) \end{cases}$ ψ est le système de coordonnées locales recherché.

$$\forall x \in V \quad f(x) = {}^t\psi(x)\, A\, \psi(x)$$

$$\forall y \in \psi(V) \quad f(\psi^{-1}(y)) = {}^ty\,A\,y = y_1^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_n^2$$