DEV : LEMME DE BOREL-CANTELLI ET APPLICATION

Ref : BARBE - LEDOUX

Lem Borel-Cantelli

Soit $(A_n)_n$ une suite d'évènements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

(i) Si $\sum \mathbb{P}(A_n) < +\infty$ alors $\mathbb{P}\{A_n : \text{is}\} = 0$

(ii) Si les $(A_n)_n$ sont indépendants et que $\sum \mathbb{P}(A_n) = +\infty$ alors $\mathbb{P}\{A_n : \text{is}\} = 1$.

(i) On suppose que $\sum \mathbb{P}(A_n) < +\infty$. On remarque que

$$\mathbb{P}\{A_n : \text{is}\} = \mathbb{P}\Big(\bigcap_{N\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq N} A_n\Big)$$

$$= \mathbb{P}\Big(\lim_{N\infty} \downarrow B_N\Big) \qquad B_N := \bigcup_{n\geq N} A_n \quad \text{dc } (B_N)_N \text{ décroissante}$$

$$= \lim_{N\infty} \mathbb{P}(B_N)$$

Or pour tout $N\in\mathbb{N}^*$ on a :

$$\mathbb{P}(B_N) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\geq N} A_n\Big) \leq \sum_{n\geq N} \mathbb{P}(A_n)$$

et $\sum_{n\geq N} \mathbb{P}(A_n) \xrightarrow[N\infty]{} 0$ car c'est le reste de la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ qui converge par hypothèse.

D'où $\lim_{N\infty} \mathbb{P}(B_N) = 0$ et donc $\mathbb{P}\{A_n : \text{is}\} = 0$.

(ii) On suppose que les $(A_n)_n$ sont indépendants et que la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ diverge.

On mq: $\mathbb{P}\{A_n \text{ i.s}\} = 1$. Cm précedement on a:

$$\mathbb{P}\{A_n \text{ i.s}\} = \lim_{N\infty} \mathbb{P}(B_N) \quad \text{où} \quad B_N := \bigcup_{n\geq N} A_n .$$

On peut mq: $\forall N \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}(B_N) = 1.$

Soit $N \in \mathbb{N}$. On a:

$$\mathbb{P}(B_N) = 1 - \mathbb{P}(B_N^c)$$

donc il suffit de mq : $\mathbb{P}(B_N^c) = 0.$

On a.

$$\mathbb{P}(B_N^c) = \mathbb{P}\Big(\bigcap_{n\geq N} A_n^c\Big) .$$

Soit $M \geq N$. On a: par indépendance des évènements

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{n=N}^{M} A_n^c\Big) = \prod_{n=N}^{M} \mathbb{P}(A_n^c) = \prod_{n=N}^{M} (1-\mathbb{P}(A_n))$$

Or $\forall x \geq 0 \quad 1-x \leq e^{-x}$ alors comme $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq \mathbb{P}(A_n) \leq 1$ on a:

$$\prod_{n=N}^{M} (1-\mathbb{P}(A_n)) \leq \exp\Big(-\sum_{n=N}^{M} \mathbb{P}(A_n)\Big) .$$

On a donc mq:

$$\forall M \geq N \qquad \mathbb{P}\Big(\bigcap_{n=N}^{M} A_n^c\Big) \leq \exp\Big(-\sum_{n=N}^{M} \mathbb{P}(A_n)\Big)$$

Par passage à la limite qd $m \to +\infty$, puisque $\sum_{n \geq N} \mathbb{P}(A_n)$ est le reste d'une série cvgte, on obtient :

$$\mathbb{P}(B_N^c) = \lim_{m \to +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=N}^{m} A_n^c\right) = 0 .$$

Lem Borel-Cantelli version CVPS.

Soit X et $(X_n)_n$ des v.a. réelles définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

(i) $\forall \varepsilon > 0 \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}\{|X_n - X| \geq \varepsilon\} < +\infty \Rightarrow X_n \longrightarrow X$ p.s.

(ii) Si les $(X_n)_n$ sont indépendants alors on a :

$$X_n \longrightarrow 0 \text{ p.s} \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}\{|X_n| \geq \varepsilon\} < +\infty .$$

(i) On suppose que :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}\{|X_n - X| \geq \varepsilon\} < +\infty .$$

Alors par le lem 1 de B-C on a :

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \mathbb{P}\{|X_n - X| \geq \varepsilon \text{ : i.s}\} = 0$$

càd, $\mathbb{P}\{X_n \to X\} = 1$, càd $X_n \longrightarrow X$ p.s.

(ii) On suppose les variables alé. $(X_n)_n$ indépendantes. Alors les évènements $(\{|X_n| \geq \varepsilon\})_n$ sont égalements indépendants.

$\Leftarrow$ On mq $X_n \longrightarrow 0$ p.s càd

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P}\{|X_n| \geq \varepsilon \text{ : i.s}\} = 0 .$$

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\sum \mathbb{P}\{|X_n| \geq \varepsilon\} < +\infty$ alors par BC

$$\mathbb{P}\{|X_n| \geq \varepsilon \text{ : i.s}\} = 0.$$

$1 \Rightarrow$ Raisonne par contraposition. On suppose qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tq $\sum \mathbb{P}\{|X_n| \geq \varepsilon_0\} = +\infty$.

On mq $X_n \not\to 0$ p.s, c.à.d,

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P}\{|X_n| \geq \varepsilon \text{ : i.s}\} \neq 0.$$

Puisque les $(\{|X_n| \geq \varepsilon\})_n$ sont independant par hypothèse d'après le lemme de B-C on a:

$$\mathbb{P}\{|X_n| \geq \varepsilon_0 \text{ : i.s}\} = 1 \neq 0.$$

APPLICATION: Exemple d'une suite de v.a qui converge en proba mais pas presque sûrement.

Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a. indépendante, de loi de Bernoulli de paramètres $p_n := \mathbb{P}\{X_n = 1\} = 1 - \mathbb{P}\{X_n = 0\}$.

On mq

$$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\infty} p_n = 0.$$

En effet, si $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ alors on a:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P}\{|X_n| \geq \varepsilon\} \xrightarrow[n\infty]{} 0$$

En particulier, pour tout $0 < \varepsilon \leq 1$ on a donc

$$p_n = \mathbb{P}\{X_n = 1\} = \mathbb{P}\{|X_n| \geq \varepsilon\} \xrightarrow[n\infty]{} 0$$

~~Puisque de plus, pour tout $\varepsilon > 1$. $\mathbb{P}\{|X_n| \geq \varepsilon\} = 0$~~

On mq :

$$X_n \longrightarrow 0 \text{ p.s} \iff \sum p_n < +\infty.$$

En effet, par le lemme 2 de B-C on a que

$$X_n \longrightarrow 0 \text{ p.s} \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \sum \mathbb{P}\{|X_n| \geq \varepsilon\} < +\infty. \quad (*)$$

Supposons que $\sum p_n < +\infty$.
Soit $\varepsilon > 0$. Si $\varepsilon > 1$ alors $\mathbb{P}\{|X_n| \geq \varepsilon\} = 0$. Si $0 < \varepsilon \leq 1$ alors $\mathbb{P}\{|X_n| \geq \varepsilon\} = p_n$ pour tout n. Ainsi

$$\forall n \qquad \mathbb{P}\{|X_n| \geq \varepsilon\} \leq p_n.$$

Par comparaison de serie, si $\sum p_n < +\infty$ alors on a :
$\forall \varepsilon > 0 \quad \sum \mathbb{P}\{|X_n| \geq \varepsilon\} < +\infty$ et donc $X_n \longrightarrow 0$ p.s. par $(*)$.

Reciproquement, si $X_n \longrightarrow 0$ p.s alors

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \sum \mathbb{P}\{|X_n| \geq \varepsilon\} < +\infty.$$

En particulier si $0 < \varepsilon \leq 1$ on a :

$$\sum p_n = \sum \mathbb{P}\{|X_n| \geq \varepsilon\} < +\infty.$$

Maintenant que nous avons caraterisé les deux cvce selon $(p_n)_n$ on choisit une suite de paramètres par exemple

$$\forall n \qquad p_n := \frac{1}{n}.$$

Alors $\lim_{n \infty} p_n = 0$ donc $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ mais puisque $\sum p_n$ diverge alors $X_n \not\longrightarrow 0$ p.s.