Leçons :
153 : Polynômes d'endomorphismes
155 : Endomorphismes diagonalisables
157 : Trigonalisables et nilpotents.

Réduction de Dunford

47

Références :
Gourdon "Algèbre" p. 194
+ Caires

lemme : Soit E un $\mathbb{K}$-ev, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $F \in \mathbb{K}[X]$ tq $F(f)=0$.
Soit $F = \beta \prod_{i=1}^{s} M_i^{\alpha_i}$ la décomposition en facteurs irréductibles de F dans $\mathbb{K}[X]$ (les M_i sont deux à deux distincts et unitaires)
Pour tout $i \in [\![1,s]\!]$, on note $N_i = \operatorname{Ker} M_i^{\alpha_i}(f)$.
Alors $E = \bigoplus_{i=1}^{s} N_i$ et pour tout $i \in [\![1,s]\!]$ la projection sur N_i parallèlement à $\bigoplus_{\substack{1\leq j\leq s \\ j\neq i}} N_j$ est un polynôme en f.

preuve :

- Les $M_i^{\alpha_i}$ sont premiers entre eux deux à deux.
  donc d'après le lemme des Noyaux : $E = \bigoplus_{i=1}^{s} N_i$
- Pour tout $i \in [\![1,s]\!]$, on pose $Q_i = \prod_{j\neq i} M_j^{\alpha_j}$.
  Les Q_i sont premiers entre eux dans leur ensemble, donc d'après Bezout il existe $U_1, \dots, U_s \in \mathbb{K}[X]$ $\sum_{i=1}^{s} U_i Q_i = 1$
  Pour tout $i \in [\![1,s]\!]$, on pose $p_i = (U_i Q_i)(f)$.
  On a $\sum_{i=1}^{s} p_i = id$ $(*)$
- Les p_i sont des polynômes en f, il reste à montrer que ce sont les projecteurs voulus.
  D'après $(*)$ $\forall x \in E$ $x = \sum_{i=1}^{s} p_i(x)$
  D'autre part, $\forall i \in [\![1,s]\!]$ $\operatorname{Im} p_i \subset N_i$ car $M_i^{\alpha_i}(f) \circ (U_i Q_i)(f) = U_i(f) \circ \underbrace{F(f)}_{=0}$
  Comme $E = \bigoplus_{i=1}^{s} N_i$, si on note $x = \sum_{i=1}^{s} \underbrace{x_i}_{\in N_i}$ $\forall x \in E$ (écriture unique)
  On obtient : $\forall x \in E$ $p_i(x) = x_i$ par unicité
  Ce qui prouve que p_i est le projecteur sur N_i parallèlement à $\bigoplus_{j\neq i} N_j$.

Thm : Soit E un $\mathbb{K}$-ev, $f \in \mathcal{L}(E)$.
On suppose que $\chi_f \in \mathbb{K}[X]$ est scindé sur $\mathbb{K}$.

Alors il existe un unique couple $(d,n) \in \mathcal{L}(E)^2$ tq
(i) d est diagonalisable, n nilpotente
(ii) $f = d + n$ et $d \circ n = n \circ d$

De plus, d et n sont des polynômes en f.

preuve :

$$\chi_f(X) = (-1)^n \prod_{i=1}^{s} (X-\lambda_i)^{\alpha_i}$$

① Existence

On pose $F = \chi_f$, $m_i = (X-\lambda_i)$, $N_i = \mathrm{Ker}(f-\lambda_i \mathrm{id})^{\alpha_i}$.

D'après Cayley-Hamilton : $F(f) = 0$.

D'après le lemme : $E = \bigoplus_{i=1}^{s} N_i$ et $\forall i \; p_i \in \mathbb{K}[f]$

On pose $d = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i p_i$ et $n = f - d$

- Dans une base adaptée à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^{s} N_i$, la matrice de d est diagonale.
  De plus $d \in \mathbb{K}[f]$.
- $n = f - d$ donc $n \in \mathbb{K}[f]$
  $$n = \sum_{i=1}^{s} (f-\lambda_i \mathrm{id}) p_i \quad , \quad p_i \circ p_j = 0 \text{ si } i \neq j$$
  donc par récurrence immédiate : $\forall q \geq 1 \quad n^q = \sum_{i=1}^{s} (f-\lambda_i \mathrm{id})^q p_i$
  Pour $q \geq \max_{1 \leq i \leq s} \alpha_i$, on a $n^q = 0$ donc n nilpotente.
- $d \circ n = n \circ d$ car $d, n \in \mathbb{K}[f]$

② Unicité :

Soit $(d', n') \in \mathcal{L}(E)^2$ un autre couple vérifiant (i) et (ii).

- d' commute avec n' donc avec $d' + n' = f$ donc avec $d \in \mathbb{K}[f]$.
  Ainsi d' et d sont codiagonalisable
- De la même manière, n' commute avec n. Donc $n' - n$ est nilpotente
- $d + n = f = d' + n'$ donc $d - d' = n' - n$
  On en déduit que $d - d' = 0$ puis que $n' - n = 0$.

Compléments sur la réduction de Dunford

- On veut calculer d et n

① Cas où l'on a accès aux valeurs propres λ_i

Il reste alors à calculer les projecteurs spectraux p_i car $d = \sum \lambda_i p_i$ et $n = f - d$

Soit F un polynôme annulant f ayant les mêmes facteurs irréductibles que χ_f (par exemple Π_f)

Si $F = \prod_{i=1}^{s} (X-\lambda_i)^{n_i}$, on a la décomposition en éléments simples dans $k(X)$:

$$\frac{1}{F} = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{x_{i,j}}{(X-\lambda_i)^j}$$

Pour tout i, on pose $U_i = \sum_{j=1}^{n_i} x_{i,j} (X-\lambda_i)^{n_i - j}$. On a $\frac{1}{F} = \sum_{i=1}^{s} \frac{U_i}{(X-\lambda_i)^{n_i}}$

On pose $Q_i = \prod_{j \neq i} (X-\lambda_j)^{n_j}$ et on a alors $1 = \sum_{i=1}^{s} U_i Q_i$

Les projecteurs sont donnés par la formule $p_i = P_i(f)$ où $P_i = U_i Q_i$

② Cas où l'on a pas accès aux valeurs propres λ_i (Dunford effectif)

Formules théoriques : $\chi_A(X) = \prod_{i=1}^{s} (X-\lambda_i)^{\alpha_i}$, $P(X) = \prod_{i=1}^{s} (X-\lambda_i)$

Formule pratique : $P(X) = \dfrac{\chi_A(X)}{\chi_A(X) \wedge \chi_A'(X)}$

La suite $\begin{cases} A_0 = A \\ A_{n+1} = A_n - P(A_n) P'(A_n)^{-1} \end{cases}$ est bien définie et est stationnaire.

Elle converge vers D, la partie diagonalisable de la décomposition de Dunford de A.

- Utilisation de la décomposition de Dunford pour calculer $\exp A$.

→ Si $f = d + n$, alors $\exp f = (\exp d)(\exp n)$

→ Si $d = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i p_i$, alors $\forall p \geq 0$ $d^p = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i^p p_i$

$$\exp d = \sum_{p \geq 0} \frac{d^p}{p!} = \sum_{p \geq 0} \frac{1}{p!} \sum_{i=1}^{s} \lambda_i^p p_i = \sum_{i=1}^{s} e^{\lambda_i} p_i$$

→ Si $n = \sum_{i=1}^{s} (f - \lambda_i \mathrm{id}) p_i$

$$\exp n = \sum_{p \geq 0} \frac{n^p}{p!} = \sum_{p \geq 0} \frac{1}{p!} \sum_{i=1}^{s} (f - \lambda_i \mathrm{Id})^p p_i = \sum_{i=1}^{s} \left(\sum_{p=0}^{n_i - 1} \frac{(f-\lambda_i \mathrm{Id})^p}{p!} \right) p_i$$