

Mai

réf : Hirsch-Lacombe, p. 28

leçons :

201

203

209

Théorème de Stone-Weierstrass

Soit (X, d) un espace métrique compact non vide.

Toute sous-algèbre séparante et unitaire de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ est dense pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

(dans le plan : définition de "séparant", théorème de Dini)

Lemme 1 Supposons que X contienne au moins deux éléments.
Soit $H \subset \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ telle que :

(i) $\forall u, v \in H : \min(u, v), \max(u, v) \in H$

(ii) $\forall x, y \in X : \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} :$

$x \neq y \Rightarrow \exists u \in H, u(x) = \alpha \text{ et } u(y) = \beta$

Alors H est dense dans $(\mathcal{C}(X, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$

démonstration du lemme :

Soient $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$

Montrons : $\exists v \in H, \|v - f\|_\infty \leq \varepsilon$

Soit $x \in X$

si Card $X \geq 2$!

Par (ii) : pour tout $y \in X$, il existe $u_y \in H$
t.q. $u_y(x) = f(x)$ et $u_y(y) = f(y)$

Posons alors $O_y := \{x' \in X \mid u_y(x') > f(x') - \varepsilon\}$

pour tout $y \in X$: ces ouverts (*) contiennent x et y

et recouvrent X : $X = \bigcup_{y \in X} O_y$

or (X, d) est compact donc vérifie la

(*) ouverts par continuité de f et u_y

propriété de Dougl-Lebesgue :

il existe $y_1, \dots, y_n \in X$, $n \in \mathbb{N}^*$

$$X = \bigcup_{i=1}^n O_{y_i}$$

Posons alors $v_x = \max_{1 \leq i \leq n} (u_{y_i}) \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$

Par (i) (et par une récurrence), $v_x \in H$

De plus :
$$\begin{cases} v_x(x) = f(x) \\ \forall x' \in X : v_x(x') > f(x) - \varepsilon \end{cases}$$

Posons $\Omega_x := \{x' \in X \mid v_x(x') < f(x') + \varepsilon\}$,
c'est un ouvert contenant x

donc $X = \bigcup_{x \in X} \Omega_x$ et par compacité :

il existe $x_1, \dots, x_m \in X$ tels que :

$$X = \bigcup_{i=1}^m \Omega_{x_i}$$

Posons finalement $v := \min_{1 \leq i \leq m} v_{x_i} \in H$
(par (i)), et :

$$\forall x \in X : f(x) - \varepsilon < v(x) < f(x) + \varepsilon$$

soit : $\|v - f\|_\infty < \varepsilon$

et ce pour tout $\varepsilon > 0$

On en déduit que H est dense. $\square$

Il s'agit maintenant de montrer qu'une
sous-algèbre unitaire et séparante vérifie (i)
et (ii').

fonctions polynomiales

Lemme 2 Il existe une suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ qui converge uniformément vers $|x|$ sur $[-1; 1]$

démo

Définissons $(P_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}}$ par récurrence :

$$\begin{cases} P_0 = 0 \\ P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{x^2 - P_n^2(x)}{2} \end{cases}$$

et montrons par récurrence :

- $\forall n \in \mathbb{N} : \forall x \in [-1; 1] : 0 \leq P_n(x) \leq P_{n+1}(x) \leq |x|$
- si $n=0$: $P_1(x) = \frac{x^2}{2}$ donc $0 \leq P_0 \leq P_1 \leq |x|$
 - Supposons le résultat vrai au rang $n \in \mathbb{N}$:
 - $P_{n+1} \leq |x|$ donc $P_{n+2} \geq P_{n+1}$
 - on peut écrire, pour $x \in [-1; 1]$:

$$|x| - P_{n+2}(x) = (|x| - P_{n+1}(x)) \left(1 - \frac{|x| + P_{n+1}(x)}{2}\right) \geq 0$$

ce qui montre le résultat au rang $n+1$

Ainsi, $(P_n)_n$ est croissante et majorée sur $[-1; 1]$ donc converge simplement vers $h \in \mathcal{C}^0([-1; 1], \mathbb{R})$

or par passage à la limite dans la déf. de (P_n) :

$$h(x)^2 = |x|^2 \quad \forall x$$

et comme $h \geq 0$: $h = |x|$

Or comme $|x|$ est continue et $[-1; 1]$ compact, cette convergence est uniforme par le théorème de

Dini

Lemme 3

Soit $H \subset \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ une sous-algèbre unitaire

alors $\overline{H}$ vérifie (i)

démo

Montrons que pour $h \in \overline{H}$: $|h| \in \overline{H}$

En effet, si $h \neq 0$: $P_n\left(\frac{h}{\|h\|_\infty}\right) = \sum_{i=0}^d a_i \left(\frac{h}{\|h\|_\infty}\right)^i \in \overline{H}$

car $\overline{H}$ est une sous-algèbre unitaire $(x \mapsto a_0 \cdot \text{CH})$

or $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers l. sur $[-1; 1]$

et $\frac{h}{\|h\|_\infty}$ est à valeurs dans $[-1; 1]$

donc $\|P_n\left(\frac{h}{\|h\|_\infty}\right) - \frac{|h|}{\|h\|_\infty}\|_\infty \leq \|P_n - l.\|_\infty^{[-1; 1]}$

et $\left(\|h\|_\infty P_n\left(\frac{h}{\|h\|_\infty}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $|h|$, donc $|h| \in \overline{H}$

Donc $\forall f, g \in \overline{H}$: $\begin{cases} \max(f, g) = \frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2} \in \overline{H} \\ \min(f, g) = \frac{f+g}{2} - \frac{|f-g|}{2} \in \overline{H} \end{cases}$

Lemme 4

Si $H \subset \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ est de plus séparante, alors H vérifie (ii) (et $\overline{H}$ aussi)

démo

Si $x \neq y \in X$, comme H est séparante

$\exists u \in H$, $u(x) \neq u(y)$

et si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$: le système

$$\begin{cases} \lambda u(x) + \mu = \alpha \\ \lambda u(y) + \mu = \beta \end{cases}$$

est de Cramer donc admet une solution

$(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, et $\lambda u + \mu \mathbb{1} \in H$ donne (ii)

Les lemmes 3, 4 puis 1 montrent le théorème, le cas où $\text{Card } X = 1$ étant trivial.