[Candelpergher p.40]

Leçons: 235 ; 239
241 ; 246

Developpement :

Equation de la chaleur sur le cercle :

On pose $\mathbb{T} = \frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}$. Pour $u_0 \in L^2(\mathbb{T})$, on considère l'équation différentielle
u_0 $\mathcal{C}^2$ et borné

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \partial_{xx} u(t,x) = 0 & \text{pour } (t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{T} \\ u(0,\cdot) = u_0 & \text{dans } L^2(\mathbb{T}). \end{cases}$$

Théorème:

Il existe une unique fonction u de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{T}$, solution de l'équation $\partial_t u - \partial_{xx} u(t,x) = 0$ avec $u(0,\cdot) \xrightarrow[t\to 0]{} u_0 \in L^2(\mathbb{T})$.

Analyse :

Soit u une solution comme énnoncé, la fonction $u(t,\cdot)$ est donc $\mathcal{C}^1$ $\forall t>0$ fixé. Ainsi, par le théorème de convergence quadratique, sa série de Fourier converge normalement :

$$\forall t>0,\ \forall x \in \mathbb{T},\quad u(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(t) \cdot e^{inx} \qquad \text{avec } \forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(t,x) e^{-inx}\,dx$$

Par dérivation sous l'intégrale, on a $c_n'(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \partial_t u(t,x) e^{-inx}\,dx$

$$\begin{aligned}
\text{et alors } c_n'(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \partial_{xx} u(t,x) e^{-inx}\,dx \\
\text{u solution, ipp} \to &= \frac{1}{2\pi}\left(\left[\partial_x u(t,x) e^{-inx}\right]_0^{2\pi} + in\int_0^{2\pi} \partial_x u(t,x) e^{-inx}\,dx \right) \\
\partial_x u \text{ est } 2\pi \text{ périodique, } e^{-inx} \text{ aussi} \to &= \frac{in}{2\pi}\int_0^{2\pi} \partial_x u(t,x) e^{-inx}\,dx \\
\text{ipp} \to &= \frac{in}{2\pi}\left(\left[u(t,x) \cdot e^{-inx}\right]_0^{2\pi} + in\int_0^{2\pi} u(t,x) \cdot e^{-inx}\,dx \right) \\
u(t,x) \text{ et } e^{-inx} \text{ sont } 2\pi \text{ périodique} \to &= \frac{-n^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(t,x) e^{-inx}\,dx \\
&= -n^2 \cdot c_n(t).
\end{aligned}$$

Ainsi $c_n(t) = c_n^0 \cdot e^{-n^2 t}$, $c_n^0 \in \cancel{\mathbb{R}}\,\mathbb{C}$

idée: Les coefficients de Fourier d'une fonction $L^2(\mathbb{T})$ donnent un isomorphisme isométrique avec $\ell^2(\mathbb{T})$ (par la formule de Parseval) donc pour avoir $u(t,\cdot) \xrightarrow[t\to 0]{} u_0 \in L^2(\mathbb{T})$, il suffit d'avoir convergence de $(c_n(t))_{n\in\mathbb{Z}}$ vers $(c_n(u_0))_{n\in\mathbb{Z}}$ dans $\ell^2(\mathbb{T})$, pour $t \to 0$

On a donc $c_n^0 = c_n(u_0)$ car $c_n(t)$ converge déjà vers c_n^0 simplement, pour $t \to 0$.

On peut écrire :

$$u(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(u_0)\, e^{-n^2 t} e^{inx} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_0(y)\, e^{-iny}\, dy\right). e^{-n^2 t} e^{inx}$$

$$= \int_0^{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi} u_0(y)\, e^{-iny} e^{-n^2 t} e^{-inx}\, dy \quad \Big) \text{ Fubini}$$

$$= \int_0^{2\pi} u_0(y)\, . \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{in(x-y)} e^{-n^2 t}\, dy$$

$$= \int_0^{2\pi} u_0(y).\, K(t, x-y)\, dy$$

où $K : (t,x) \mapsto \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{inx} e^{-n^2 t}$ est le noyau de la chaleur.

<u>Synthèse:</u>

Posons $K_n(t,x) := \frac{1}{2\pi} e^{-n^2 t} e^{inx}$. On a $K = \sum_{n\in\mathbb{Z}} K_n$

$\forall n \in \mathbb{Z}$, $\forall k,l \in \mathbb{N}$, on a:

$$\left| \frac{\partial^{k+l}}{\partial t^k \partial x^l} K_n(t,x) \right| = \left| \frac{1}{2\pi} (-n^2)^k (in)^l e^{-n^2 t} e^{inx} \right| \leq \frac{1}{2\pi} |n|^{2k+l} e^{-n^2 a}$$

pour $t > a > 0$. Ce dernier terme est sommable sur $\mathbb{Z}$, et par le théorème de dérivation sous l'intégrale $K(t,x)$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{T}$, avec de plus $\partial_t K = \partial_{xx} K$.

Ensuite, u s'écrit comme l'intégrale à paramètre

$$u(t,x) = \int_0^{2\pi} u_0(y).\, K(t, x-y)\, dy$$

<u>Montrons que u est de classe $\mathcal{C}^\infty$:</u>

- $u_0(y). K(t, x-y)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ en t et en x
- $\forall t > a > 0$, $\left| \frac{\partial^{k+l}}{\partial t^k \partial x^l} u_0(y) K(t,x-y) \right| \leq C. |u_0(y)|$ avec $C = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi} n^{2k+l} e^{-n^2 a}$

et $C.|u_0(y)|$ intégrable sur $[0, 2\pi]$ car $u_0 \in L^2(\mathbb{T})$.

↳ Ainsi u est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]a, +\infty[\times \mathbb{T}$, $\forall a > 0$ donc sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{T}$.

De plus, u vérifie l'équation de la chaleur.

<u>Conditions aux bords:</u>

Il suffit de mq $\| c_n(u(t,\cdot)) - c_n(u_0) \|_2 \xrightarrow[t\to 0]{} 0$

On, $\| c_n(u(t,\cdot)) - c_n(u_0) \|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left| c_n(u_0) - c_n(u_0).e^{-n^2 t} \right|^2$ (car $\overset{c_n(u(t,\cdot))}{\overset{\shortparallel}{c_n(t)}} = c_n(u_0).e^{-n^2 t}$ voir Analyse)

$$\leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(u_0)|^2. \underbrace{\left| 1 - e^{-n^2 t} \right|^2}_{\leq 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^*}$$

$\in \ell^2$ par la bijection $u(0,x) \leftrightarrow c_n(u)$

et on conclut par convergence dominée.