[Appel]

Développement :

Processus de Galton - Watson :

leçons $\begin{cases} 226 & 253 \\ 229 & 266 \\ 264 & \\ 241 & (223) \end{cases}$

Théorème :

On considère l'évolution d'une population dont on note Z_n le nombre d'individus à la génération n. On a $Z_0 = 1$. On suppose que chaque individu i de la génération n a $Y_{n,i}$ enfants, de telle sorte que $Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} Y_{n,i}$. On suppose les $(Y_{n,i})_{\substack{i\in\mathbb{N}^* \\ n\in\mathbb{N}}}$ iid, et pour $Y = Y_{0,1}$ on note $m = \mathbb{E}(Y)$ et $\forall k$, $p_k = \mathbb{P}(Y = k)$.
On suppose $0 < p_0 < 1$. Alors :
- si $m \leq 1$, la population s'éteint presque sûrement.
- si $m > 1$, la population s'éteint avec une proba non nulle.

Étape 1 : Fonction génératrice de Z_n :

On note $g(s) = \mathbb{E}[s^Y]$ la fonction génératrice de Y.
Ainsi, $g(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} s^k . p_k$.
On note G_n la fonction génératrice de Z_n, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} Y_{n,i}$.
Ainsi, $\forall s \in [0,1]$, $G_{n+1}(s) = \mathbb{E}[s^{Z_{n+1}}] = \mathbb{E}[s^{Y_{n,1} + \dots + Y_{n,Z_n}}]$

$$= \mathbb{E}\Big[\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{Z_n = k\}} s^{Y_{n,1}+\dots+Y_{n,k}}\Big] \underset{\text{indep.}}{\overset{\text{Fubini}}{=}} \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z_n = k) . \mathbb{E}[s^{Y_{n,1}+\dots+Y_{n,k}}]$$

$$\underset{\text{indep}}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z_n = k) . \mathbb{E}[s^Y]^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z_n = k) . g(s)^k = G_n(g(s)).$$

Ainsi, par récurrence immédiate, $\forall n \in \mathbb{N}$, $G_n(s) = g^n(s)$, $\forall s \in [0,1]$.

Étape 2 : Croissance et convexité de g :

- On a $\forall s \in [0,1]$: $g'(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} k . p_k . s^{k-1} \geq 0$

$$g''(s) = \sum_{k=2}^{+\infty} k.(k-1).p_k . s^{k-2} \geq 0$$

De plus, $p_0 < 1$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} p_k = 1$ donc $\exists k \geq 1$ tq $p_k > 0$. Ainsi, $\forall s \in]0,1]$, $g(s)$ est strictement croissante.
- Si $p_0 + p_1 = 1$, alors $g''(s) = 0$ et g affine sur $[0,1]$
- Si $\exists k \geq 2$ tq $p_k > 0$, alors $g''(s) > 0$ sur $]0,1[$ et g strictement convexe.

Étape 3 : Probabilité d'extinction

Notons $A =$ " la population finit par s'éteindre " $= \bigcup_{n \geq 0} \{Z_n = 0\}$

Remarquons que $\{Z_n = 0\} \subset \{Z_{n+1} = 0\}$ donc A union croissante pour l'inclusion.

Ainsi, $\mathbb{P}(A) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(Z_n = 0) = \lim_{n \to +\infty} G_n(0)$ (car $G_n(s) = \sum_{k \geq 0} s^k \, \mathbb{P}(Z_n = k)$). Or la suite $(G_n(0))_{n \geq 0}$ est croissante car $\mathbb{P}(Z_n = 0) \leq \mathbb{P}(Z_{n+1} = 0)$, et majorée par 1.

Ainsi $P(A)$ converge vers $\alpha \in [0,1]$.

<u>Lemme:</u> α est le plus petit point fixe de g sur $[0,1]$:

<u>preuve:</u> . $\mathbb{P}(Z_n = 0) = G_n(0) \Rightarrow P(Z_{n+1} = 0) = G_{n+1}(0) = g(G_n(0)) = g(\mathbb{P}(Z_n = 0))$

En passant à la limite (g étant continue sur $[0,1]$), α est un point fixe de g.

. Soit β le plus petit point fixe de g sur $[0,1]$ (existe car 1 en est un). $\forall x \in [0,1]$, g est croissante sur $[0,1]$. Ainsi,

$$g([0,\beta]) \subset [\underbrace{g(0)}_{\geq 0}, \underbrace{g(\beta)}_{= \beta}] \subset [0,\beta]$$

Or $\underbrace{\mathbb{P}(Z_0 = 0)}_{= 0} \in [0,\beta]$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(Z_n = 0) \in [0,\beta]$.

Par continuité de g, $\mathbb{P}\{Z_n = 0\} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \alpha \in [0,\beta]$ d'où $\alpha = \beta$.

Soit $m = \mathbb{E}[X] = g'(1)$. Posons $\varphi(s) = g(s) - s$, $\forall s \in [0,1]$.

* $m < 1$ $\varphi'(s) = g'(s) - 1$. Or, $g'(1) < 1$ donc $\varphi'(1) < 0$. De plus, g convexe, g' croissante et φ' aussi. Donc $\forall s \in [0,1]$, $\varphi'(s) < 0$. Donc φ strictement décroissante. Donc $\forall s \in [0,1[$, $\varphi(s) > \varphi(1) = 0$. 1 est le seul point fixe de g, donc $P(A) = 1$.

* si $m > 1$ $\varphi'(1) > 0$ et $\varphi(1) = 0$. Ainsi par continuité, $\exists \alpha \in]0,1[$ tq $\varphi(\alpha) < 0$. Or $\varphi(0) = g(0) = p_0 > 0$ donc par le TVI, $\exists v \in]0,\alpha[$ tq $g(v) = v$. De plus, c'est le seul point fixe de g dans $]0,1[$.

<u>preuve:</u> . si g affine, vu que $\begin{cases} g(0) > 0 \\ g(1) = 1 \end{cases}$, on a un unique pt fixe : 1

. Sinon: Soit $v_1, v_2 \in]0,1[$ distincts deux points fixes de g. Par Rolle, $\exists \beta \in]v_1, v_2[$ tq $\varphi'(\beta) = 0$. Rolle donne aussi $\exists \beta' \in]v_2, 1[$ tq $\varphi'(\beta') = 0$. Ainsi $g'(\beta) = g'(\beta') = 1$ donc par Rolle, $\exists \gamma \in]\beta, \beta'[$ tq $g''(\gamma) = 0$. Cela contredit la stricte convexité de g. Ainsi $P(A) = v$.

* Si $m = 1$

Deux cas:

- Si $p_0 + p_1 = 1$: $m = g'(1) = 1 \Rightarrow p_1 = 1$: contradiction car $p_0 > 0$
- Ainsi $\exists k \geq 2$ tq $p_k > 0$, i.e. g strictement convexe sur $]0,1[$

En particulier sa courbe est au dessus de la droite $y = x$ sur $]0,1[$.*

Ainsi $\mathbb{P}(A) = \alpha = 1$ d'où extinction p.s.

* Preuve :

Si g coupe $y = x$, alors $\exists\, p \in]0,1[$ tq $g(p) = p$.

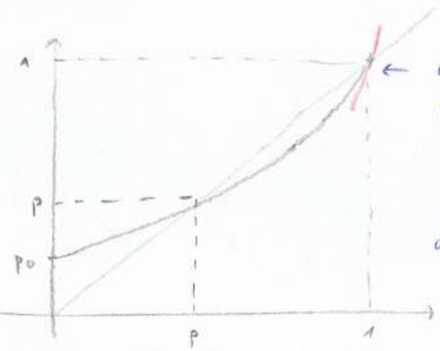
La tangeante en la courbe de g au point (p,p) est en dessous

La corde reliant (p,p) à $(1,1)$ est au dessus de la courbe de g.

Mais ces deux fonctions sont confondus (m pente, passant par (p,p))

d'où $g_{|[p,1]} = Id_{|[p,1]}$. Par prolongement analytique, $g = Id$.

Mais alors $p_0 = 0$ contradiction ! Ainsi 1 est le seul pt fixe.



← en 1, l'équation de la tangeante est
$y = g'(1)(x-1) + g(1)$
$= (x-1) + 1$
$= x$
donc se confond avec $y = x$.

(3) Si $m=1$, g strictement convexe. S'il y a un pt fixe
↳ sinon : g affine $\Rightarrow g = ax+b \Rightarrow g'(x) = a$ or $\begin{cases} g(0)=p_0 \\ g(1)=1 \end{cases}$ ..
$p \in]0,1[$, alors la tangeante en (p,p) est en dessous de la courbe, et la corde de (p,p) à $(1,1)$ est au dessus de la courbe. Mais ces deux droites sont confondues (m̂ pente, passent par le m̂ point). donc $g_{|[p,1]} = Id$. Par prolongement analytique, $g = Id$. Mais alors $p_0 = 0$, contradiction ! Donc 1 est le seul pt fixe et $P(A) = 1$

■

Le blabla :

Cadre · étude des gènes
· réact° en chaîne nucléaires
· survivance des noms de famille

question Mq g définie sur $[0,1]$ et y est $\mathcal{C}^1$

$\forall k \in \mathbb{N}$, $s \mapsto p_k \cdot s^k$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

$\sum_{k \geq 0}^{N} p_k \cdot 1^k \xrightarrow[N \to +\infty]{} 1$

$\sum_{k \geq 1} k \cdot p_k \cdot s^{k-1}$ $\underline{\text{cv normalement}}$ donc unif sur $[0,1]$
↓
car ~~y~~ intégrable

Ainsi $\sum_{k \geq 0} p_k \cdot s^k$ conv. unif vers g, qui est $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

Mq $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\forall i \in \mathbb{N}$ $Z_n \perp\!\!\!\perp X_{i,n}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, Z_n ne dépend que de Z_{n-1} et de la famille $(X_{i,n-1})_{i \in \mathbb{N}}$
Ainsi par récurrence immédiate, Z_n ne dépend que de la famille $(X_{i,j})_{i \geq 0, j < n}$
Or les $X_{i,j}$ sont indep. Donc $Z_n \perp\!\!\!\perp X_{i,n}$

Question attendue Que vaut $\mathbb{E}[Z_n]$?

prop $\mathbb{E}[Z_n] = m^n$.

preuve : (récurrence)

- $Z_0 = 1$ donc $\mathbb{E}[Z_0] = 1 = m^0$
- Supposons pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}[Z_n] = m^n$.

Méthode 1

On peut dériver g_n (comme pour g) et $\forall s \in [0,1]$, $g'_{n+1}(s) = g'(s) \cdot (g'_n \circ g)$

donc en 1 :

$$g'_{n+1}(1) = \mathbb{E}[X] \cdot (g'_n(g(1))$$
$$= m \cdot g'_n(1)$$
$$= m^{n+1}$$

Méthode 2

$$\mathbb{E}[Z_{n+1}] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{Z_n} X_{i,n}\right]$$
$$= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{Z_n} X_{i,n} \mid Z_n\right]\right]$$
$$= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{i \leq Z_n\}} \cdot X_{i,n} \mid Z_n\right]\right]$$

Fubini (+) car ≥ 0 ps et mesurable

$$= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{i \leq Z_n\}} \mathbb{E}[X_{i,n} \mid Z_n]\right]$$
$$= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{Z_n} \mathbb{E}[X_{i,n}]\right] \quad (X_{i,n} \perp\!\!\!\perp Z_n)$$
$$= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{Z_n} m\right]$$
$$= m \cdot \mathbb{E}[Z_n]$$
$$= m^{n+1}$$

■

Visuel (oral (ou dev))

parler de Processus de branchement, dire que Z_n est une CM issue de 1, espace d'état dénombrable, 0 absorbant, transciente

histoire (quest jury)

Introduit en 1873 par Galton pour étudier disparit des patronymes anglais