ref : Hirsch - Lacombe
p. 91

Développement : Projection sur un convexe fermé et représentation de Riesz :

Leçons 205 208 213 219 253

Théorème : (projection sur un convexe fermé)

Soit H un espace de Hilbert et $C \subset H$ une partie convexe fermée. ($C \neq \emptyset$)

Alors $\forall x \in H, \exists ! y \in C ; d(x,C) = \|x-y\|$. On le note $P_C(x) := y$

et on a de plus la caractérisation $y = P_C(x) \iff \begin{cases} y \in C \\ \text{et} \\ \forall z \in C, \operatorname{Re}(y-x, y-z) \leq 0 \end{cases}$

Preuve :

* Existence :

On pose $d = d(x,C)$, cette distance est définie comme un inf, il existe donc une suite minimisante (y_n) de C tq

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|x-y_n\|^2 \leq d^2 + \frac{1}{n}$$

Montrons que (y_n) est de Cauchy : Par l'identité du parallélogramme, on a $\forall p, n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{2}\left(\|y_n - x\|^2 + \|y_p - x\|^2\right) = \left\|x - \frac{y_n+y_p}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{y_n-y_p}{2}\right\|^2$$

Par convexité de C, $\frac{y_n+y_p}{2} \in C$ donc :

$$d^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{p}\right) \geq d^2 + \left\|\frac{y_n-y_p}{2}\right\|^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{p}\right) \geq \frac{1}{2} \cdot \|y_n - y_p\|^2$$

et donc (y_n) est une suite de Cauchy : elle admet une limite $y \in C$, car C est fermé.

$\forall \varepsilon > 0$, on a $\|x-y\| \leq \|x-y_n\| + \|y_n - y\| \leq \sqrt{d^2 + \frac{1}{n}} + \varepsilon$ donc $\|x-y\| = d$.

Ainsi y réalise la projection.

* Unicité :

Soit y, y' réalisant la projection. Par l'identité du parallélogramme,

$$\frac{1}{2}\left(\|x-y\|^2 + \|x-y'\|^2\right) = \left\|x - \frac{y+y'}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{y-y'}{2}\right\|^2$$

$$\Rightarrow d^2 - \left\|\frac{y-y'}{2}\right\|^2 = \left\|x - \frac{y+y'}{2}\right\|^2$$

Or $\frac{y+y'}{2} \in C$ par convexité de C, et donc par def de d, $y = y'$.

* Caractérisation :

Soit $y = P_C(x)$, soit $z \in C$. Par convexité de C, $(1-t)y + tz \in C$. Ainsi :

$$\underbrace{\|x-(1-t)y - tz\|^2}_{\geq d^2} = \|x - y + t(y-z)\|^2 = \underbrace{\|x-y\|^2}_{= d^2} + t^2 \cdot \|y-z\|^2 + 2t \cdot \operatorname{Re}(x-y, y-z)$$

$\Rightarrow t^2 \cdot \|y-z\|^2 + 2t \cdot \operatorname{Re}(x-y, y-z) \geq 0$. On divise par t, et on fait tendre $t \to 0$

On obtient $\mathrm{Re}(y-x, y-z) \leq 0$.

Réciproquement, soit $z \in C$.

$$\|z-x\|^2 = \|z-y+y-x\|^2 = \|z-y\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z-y, y-x) + \|y-x\|^2$$
$$\geq \|y-x\|^2.$$

Ceci est vrai $\forall z \in C$, d'où $\|y-x\| = \inf_{z\in C} \|z-x\|$. ■

Corollaire:

Si C est un sev fermé de H, $H = C \oplus C^\perp$ et p_C est linéaire continue.

Preuve:

- Si $x \in C \cap C^\perp$, $\langle x, x\rangle = \|x\|^2 = 0$ donc $x = 0$.
- Mq $H = C + C^\perp$.

  Soit $x \in H$, $y = p_C(x)$.

  Soit $z \in C$. Alors $\forall u \in \mathbb{C}$, $y + uz \in C$.

  Ainsi $\mathrm{Re}(\langle y-x, y-(y+uz)\rangle) = \mathrm{Re}\langle y-x, -uz\rangle = \mathrm{Re}\langle x-y, uz\rangle \leq 0$.

  Pour le choix particulier de $\boxed{u = \langle x-y, z\rangle \in \mathbb{C}}$,

  $\mathrm{Re}\langle x-y, uz\rangle = \mathrm{Re}(\bar{u}.\langle x-y, z\rangle) = \mathrm{Re}(\bar{u}.u) = \|u\|^2 \leq 0$ d'où $u=0$.

  Ainsi, $x-y \in C^\perp$, et donc $x = \underbrace{x-y}_{\in C^\perp} + \underbrace{y}_{\in C}$
- Mq p_C linéaire continue :

  $C \oplus C^\perp = H \Rightarrow P: C \oplus C^\perp \to C$, $(x_1, x_2) \mapsto x_1$ est la proj orthogonale de H sur C.

  Elle est clairement linéaire. De plus, $\forall (x,y) \in C \times C^\perp$,

  $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \underbrace{2\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle}_{=0} \geq \|x\|^2 = \|P_C(x+y)\|^2$. Donc $\|P_C(z)\| \leq \|z\|$.

Théorème: (Représentation de Riesz)

Soit $f \in H'$, $\exists!\, y \in H$ tq $f = \langle \cdot, y\rangle$. De plus, $\|f\| = \|y\|$.

existence

Si $f=0$, $y=0$ convient. Sinon, $\ker(f) \neq H$ et $\ker(f)$ sev fermé de H.

$H = \ker(f) \oplus \ker(f)^\perp$. Comme $f \neq 0$, $\ker(f)^\perp$ est non trivial et de dimension 1 (en tant que supplémentaire d'un hyperplan). Soit $e \in \ker(f)^\perp$ de norme 1, e engendre $(\ker f)^\perp$. Posons $y = \overline{f(e)}.e$

$\forall x \in H$, $x = \underbrace{x_1}_{\in \ker f} + \underbrace{\lambda e}_{\in \ker f^\perp}$ donc $f(x) = f(x_1) + f(\lambda e) = \lambda f(e) = \langle x_1 + \lambda e, \overline{f(e)}.e\rangle$

↳ en effet : $\langle x_1+\lambda e, \overline{f(e)}e\rangle = \langle \underbrace{x_1}_{\in\ker f}, \underbrace{\overline{f(e)}e}_{\in \ker f^\perp}\rangle + \lambda f(e).\underbrace{\langle e,e\rangle}_{=1}$

La condition $\|y\| = \|f\|$ est alors immédiate.

unicité: soit y, y' deux candidats. $\forall x \in H$, $\langle x, y-y'\rangle = f(x) - f(x) = 0$.

donc $y - y' \in H^\perp = \{0\}$. ■

Application :

Soit E, F Hilberts et $T \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors $\exists!$ application $T^* \in \mathcal{L}(F,E)$ appellé adjoint de T tq $\forall x \in E, \forall y \in F$, $\langle T(x), y \rangle_F = \langle x, T^*(y) \rangle_E$ et de plus, $\|T\| = \|T^*\|$.

Preuve :

▶ $\forall y \in F$, on considère $\varphi_y : x \mapsto \langle T(x), y \rangle$. Mq φ_y est linéaire continue et que $\exists! z \in E$ tq $\forall x \in E$, $\varphi_y(x) = \langle T(x), y \rangle = \langle x, z \rangle$.

→ φ_y est clairement linéaire par linéarité de T et linéarité à gauche de $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

→ φ_y est continue par continuité de T et par Cauchy Schwarz :

$|\varphi_y(x)| = |\langle T(x), y \rangle| \leqslant \|T(x)\| \cdot \|y\| \leqslant \|T\| \cdot \|x\| \cdot \|y\|$

donc en posant $C = \|T\| \cdot \|y\|$, on a $|\varphi_y(x)| \leqslant C \cdot \|x\|$.

→ Par le théorème de représentation de Riesz, $\exists!$ vecteur noté $T^*(y)$ tq

$\forall x \in E$, $\varphi_y(x) = \langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle$.

Par l'unicité de $T^*(y)$ pour y donné, on définit $T^* : F \to E$.

▶ Mq T^* linéaire :

Poser $\langle x, T^*(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) \rangle$ et développer avec propriété.

▶ Mq T^* continue.

$|\langle x, T^*(y) \rangle| = |\langle T(x), y \rangle| \leqslant \|T\| \cdot \|x\| \cdot \|y\|$.

De plus, $\|T^*(y)\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \langle x, T^*(y) \rangle$ etc..