Ref. Dugardin Rezzouk
exo 1.28 p. 72
1.31 p. 77

Développement : Lemme de Borel-Cantelli et applications :

leçon 230 262 266

Théorème (lemme de Borel Cantelli)

Soit (A_n) suite d'évenements dans A. Posons $A = \bigcap_{n\geq 0} \bigcup_{k\geq n} A_k$ ($= \limsup A_n$). Alors :

i) $\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(A_n) < +\infty \Rightarrow \mathbb{P}(A) = 0$

ii) Si les (A_n) sont indépendants, $\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(A_n) = +\infty \Rightarrow \mathbb{P}(A) = 1$

Preuve :

i) ⚠ $\mathbb{P}$ mesure finie, si on avait une mesure μ quelconque, on la rend finie en remplaçant X par la réunion des A_n.

Posons $B_n = \bigcup_{k\geq n} A_k$ et remarquons que B_n suite décroissante pour l'inclusion d'éléments de A, car $B_n = A_n \cup B_{n+1}$. Ainsi par finitude de $\mathbb{P}$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\geq 0} B_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_n)$$

De plus $\mathbb{P}(B_n)$ majorée par $\sum_{k\geq n} \mathbb{P}(A_k)$ (par σ additivité) qui est le reste d'une série convergente, donc $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_n) = 0$.

Comme $\limsup_{n\to+\infty} A_n = \bigcap_{n\geq 0} B_n$, on conclut que $\mathbb{P}(\limsup_{n\to+\infty} A_n) = 0$.

ii) Comme les (A_n) sont indépendants, il en est de même pour leurs complémentaires. On a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=n}^{m} A_j\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=n}^{m} A_j^c\right) = 1 - \prod_{j=n}^{m} \mathbb{P}(A_j^c) \geq 1 - \exp\left[-\sum_{j=n}^{m} \mathbb{P}(A_j)\right]$$

$\forall u \in \mathbb{R}, 1+u \leq e^u$ pour $u = -\mathbb{P}(A_j)$

et en faisant tendre $m \to +\infty$, on obtient

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=n}^{+\infty} A_j\right) \geq 1 - \exp\left(-\sum_{j=n}^{+\infty} \mathbb{P}(A_j)\right) = 1$$

Comme les $\bigcup_{j=n}^{+\infty} A_j$ décroissent vers $\limsup_{n\to+\infty} A_n$ quand $n \to +\infty$, on a bien $\mathbb{P}(\limsup_{n\to+\infty} A_n) \geq 1$, et donc $= 1$. ■

Application 1 : (caractérisation de la convergence presque sûre)

Soit (X_n) suite de v.a, X une v.a. Pour $\varepsilon > 0$, on pose $A_n(\varepsilon) = \{|X_n - X| > \varepsilon\}$.
Si $\forall \varepsilon > 0$, $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(A_n(\varepsilon)) < +\infty$, alors $(X_n) \xrightarrow{PS} X$, ie $\exists \mathcal{A}$ tq $\mathbb{P}(\mathcal{A}) = 1$ et $\forall \omega \in \mathcal{A}$, $\lim_{n \to +\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$.

Posons $B(\varepsilon) = \bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{k \geq n} A_k(\varepsilon)$. On a par hypothèse $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(A_n(\varepsilon)) < +\infty$,

et par Borel Cantelli (i) on a $\mathbb{P}(B(\varepsilon)) = 0$.

Posons $B := \bigcup_{p \geq 1} B(\frac{1}{p})$. Alors $\mathbb{P}(B) \leqslant \sum_{p \geq 1} \mathbb{P}(B(\frac{1}{p})) = 0$.

Soit $\omega \in \Omega \setminus B$. On a :

$$\forall p \geq 1, \exists n \geq 0 : \forall k \geq n, |X_n(\omega) - X(\omega)| \leqslant \frac{1}{p}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$$

d'où $X_n \xrightarrow{PS} X$.

Application 2 : (paradoxe du singe)

On tape aléatoirement un texte au clavier, chaque caractère étant équiprobable.
Alors presque sûrement, le texte tapé contiendra l'intégrale de Bourbaki.

Soit (X_n) la v.a. représentant le caractère tapé à la $n^{ième}$ étape.
Les v.a. $(X_n)_{n \geq 0}$ sont iid. Soit ℓ la longueur de l'intégrale de Bourbaki dans l'ordre chronologique et $(c_i)_{i \in [\![1,\ell]\!]}$ la suite de caractères.

Posons $A_k = \{\forall i \in [\![1, \ell]\!], X_{k+i} = c_i\}$ l'évènement représentant le moment où le texte voulu est tapé. Les évènements $(A_k)_{k \geq 0}$ sont indépendants et $\forall k \geq 0$, $\mathbb{P}(A_k) = \frac{1}{N^\ell}$ où N le nombre de touches sur le clavier. Comme $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(A_k) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{N^\ell} = +\infty$, par Borel Cantelli, $\mathbb{P}(\limsup A_k) = 1$.

Application 3:

Il n'existe pas de mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$ tq $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(\text{multiple de } n) = \frac{1}{n}$.

Notons (p_k) la suite croissante des nombres premiers. Par l'absurde, supposons que cette proba existe :

- On mq les $A_{p_k} = \{\text{multiples de } p_k\}$ sont indépendants

Soit $\mathcal{P} \subset \{p_k ; k \geq 1\}$ finie. On a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{p\in\mathcal{P}} A_p\right) = \mathbb{P}\left\{\text{multiple de } \prod_{p\in\mathcal{P}} p\right\} = \frac{1}{\prod_{p\in\mathcal{P}} p} = \prod_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{p} = \prod_{p\in\mathcal{P}} \mathbb{P}(A_p)$$

donc les A_{p_k} sont indépendants.

- On conclut par Borel Cantelli :

$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{p_k}$ diverge donc $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(A_{p_k}) = +\infty$

Par Borel Cantelli, les événements (A_{p_k}) étant indépendants,

$\mathbb{P}(\limsup_{p_k\to+\infty} A_{p_k}) = 1$.

Ainsi pour presque tout entier $n \geq 1$, il existe une infinité de nombres premiers le divisant. Absurde !