ref : Ulmer
Peyré

# Sous groupes distingués et caractères :

leçons 103
104
107

Le but de ce développement est de faire le lien entre la table de caractères et la simplicité d'un groupe fini $G$. Si $\chi$ est un caractère, on définit

$$K_\chi = \{ g \in G ;\ \chi(g) = \chi(1) \}$$

**Lemme :**

Pour tout caractère $\chi$ de $G$, $K_\chi$ est un sous groupe distingué de $G$.

**Preuve :**

Soit $(\rho, V)$ une représentation ayant pour caractère $\chi$. On va montrer qu'on a en fait $\ker \rho = K_\chi$. Ce faisant, puisque $\rho$ est un morphisme de groupe, on aura automatiquement que $K_\chi$ sous groupe distingué de $G$. L'inclusion directe étant triviale, intéressons nous à la réciproque :

Soit $g \in G$ tq $\chi(g) = \chi(1)$. Remarquons déjà que $\rho(g)$ est un endomorphisme diagonalisable, car annulé par le polynôme scindé à racines simples $X^{|G|} - 1$.

Ainsi, $\chi(g)$ qui est la trace de $\rho(g)$ est égal à une somme de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ qui sont des racines $|G|^{\text{ème}}$ de l'unité.

$$|\chi(g)| = \left| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| = n = \chi(1)$$

Or les deux termes extremaux de cette inégalité sont égaux, on a donc égalité triangulaire. Ainsi $\forall i \neq j$, $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}$ tq $\lambda_i = \varepsilon \lambda_j$

Or les valeurs propres sont des racines de l'unité, donc sont de module 1. On a ainsi $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 1$, soit $\rho(g) = Id$ et donc $g \in \ker \rho$. ■

**Théorème :** Soit $\chi_1, \dots, \chi_p$ les caractère irréductibles de G. Alors les sous groupes H distingués sont exactement ceux de la forme :

$$H = \bigcap_{i \in I} K_{\chi_i}$$

où $I \subset [\![1,p]\!]$.

**Preuve :** Dans un sens, tout les groupes de cette forme sont bien distingués dans G, en tant qu'intersection de sous groups distingués de G.

Réciproquement, soit H un sous groupe distingué de G. On peut alors considérer le groupe quotient $G/H$. Soit $\tilde{\rho}$ sa représentation régulière.

On ramène ceci à une représentation $\rho = \tilde{\rho} \circ \pi$ de G avec $\pi : G \to G/H$ la projection canonique. Puisque la représentation régulière est fidèle*, $\ker \rho = \ker \pi = H$. Soit $\chi$ le caractère de cette représentation qu'on écrit en somme de caractères irréductibles : $\chi = \sum_{i=1}^{p} m_i \chi_i$. Alors $\forall g \in G$, on a

$$|\chi(g)| \leqslant \sum_{i=1}^{p} m_i \cdot |\chi_i(g)| \leqslant \sum_{i=1}^{p} m_i \chi_i(1) = \chi(1)$$

où on a utilisé $\forall i, \ |\chi_i(g)| \leqslant \chi_i(1)$ qui se démontre de la même façon que la preuve du lemme.

---

* La représentation régulière correspond à l'action de G sur lui même par translat° à gauche. C'est donc une représentat° de permutation. Ainsi,

$$\chi_{reg}(g) = \begin{cases} |G| & \text{si } g = Id \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et donc $\rho_{reg}$ est fidèle.

Ainsi en remarquant que $\ker \rho = K_\chi$, $g \in H$ ssi ces inégalités sont des égalités, et donc ssi $\forall i,\ m_i \chi_i(g) = m_i \chi_i(1)$. Si $m_i = 0$, on a toujours égalité $\forall g$. Sinon, cela revient à demander $g \in K_{\chi_i}$. On a alors :

$$H = \bigcap_{m_i \neq 0} K_{\chi_i}.$$

$\blacksquare$

<u>Corollaire</u> : G est simple ssi pour tout caractère irréductible non trivial $\chi$, $\chi(g) \neq \chi(1)$ dès que $g \neq 1$.

<u>Preuve</u> :

- Si G est simple, soit $\chi$ un caractère irréductible non trivial. Alors $K_\chi$ est un sous groupe distingué de G qui est distinct de G, puisque $\chi$ n'est pas trivial. Nécessairement, par simplicité de G, $K_\chi = \{1\}$ donc $\chi(g) \neq \chi(1)$ dès que $g \neq 1$.
- Réciproquement, soit H sous groupe distingué de G, $H \neq G$. Alors il existe une partie I de $[\![1, p]\!]$ tq $H = \bigcap_{i \in I} K_{\chi_i}$. Puisque $H \neq G$, cette intersection n'est pas uniquement composée du noyau du caractère trivial, sinon on aurait $H = G$. Soit alors $i_0 \in I$ tq $\chi_{i_0}$ soit non trivial. Alors $K_{\chi_{i_0}} = \{1\}$ par hypothèse, et alors $H = \{1\}$ ce qui prouve que G est simple. $\blacksquare$

<u>Remarque</u> : Nous avons vu que $\chi(g) = \chi(1)$ ssi $|\chi(g)| = \chi(1)$, ce qui n'est pas évident : le membre de droite est un entier, mais le membre de gauche est un nombre complexe, prendre le module peut changer l'égalité. Ce résultat découle de l'égalité triangulaire dans le lemme : $|\chi(g)| = \chi(1)$ implique l'égalité triangulaire, donc $\rho(g) = Id$ et $\chi(g) = \chi(1)$.

## Application 1 : $A_5$ est un groupe simple
(du corollaire)

Nous allons utiliser le corollaire et calculer la table de caractère de $A_5$ :

### ▶ 1 : Classes de conjugaison de $A_5$ :

- On montre sans soucis que les 3-cycles et les double permutation sont conjugués dans $A_5$
- Il y a deux classes de 5-cycle : celle de $(12345)$ et de $(21345)$. (il y a 12 5-cycle dans chacune des classes).

[En effet, les 5 cycles sont conjugués dans $S_5$, donc il y a au plus deux classes : ceux conjugués dans $A_5$ et les autre. Mais en conjugant ceux de le deuxième une deuxième fois par le même cycle, ils sont aussi conjugués dans $A_5$. Enfin $(12345)$ et $(21345)$ ne sont pas conjugués dans $A_5$, car ils sont conjugués par $(12)$.] $S_5 = \{$ identité ; 3-cycle ; double transpo ; 5cycle$_A$ ; 5cycle$_B\}$

### ▶ 2 : $\chi_{triv}$ et $\chi_{std}$ :

On regarde la représentation naturelle de $A_5$ sur $\mathbb{R}^5$ obtenue par permutation des vecteurs de base. Le caractère associé $\chi_{\mathbb{R}^5}$ est la trace d'une matrice de permutation, autrement dit $\chi_{\mathbb{R}^5}$ nbre de pt fixe de $\sigma$. Cette représentation laisse stable $\mathrm{Vect}\{(1,1,1,1,1)\}$, il s'agit donc d'une représentation de dim 1 donc irréductible : c'est $\rho_{triv}$ la représentation triviale.

On a alors un caractère de dim 4, $\chi$, tq $\chi = \chi_{\mathbb{R}^5} - \chi_{triv}$

i.e. $\begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\\2\\1\\0\\0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1\\1\\1\\1\\1 \end{pmatrix}$

et donc $\chi = \begin{pmatrix} 4\\1\\0\\-1\\-1 \end{pmatrix}$. On vérifie $\langle \chi, \chi \rangle = 1$.

On note $\chi := \chi_{stand}$.

| $S_4$ | Id | $(123)$ | $(12)(34)$ | $(12345)$ | $(21345)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\rho_{triv}$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $\rho_{stand}$ | 4 | 1 | 0 | $-1$ | $-1$ |
| $\chi_3$ | 3 | | | | |
| $\chi_3'$ | 3 | | | | |
| $\chi_5$ | 5 | | | | |

On remarque que $60 = 1^2 + 4^2 + a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow \begin{matrix} a=3 \\ b=3 \\ c=5 \end{matrix}$. Donc

## 3 : La représentation de dim 5 :

On regarde l'action naturelle de $A_5$ sur les 10 paires d'éléments distincts de $[\![1,5]\!]$. tq $\sigma.\{a,b\} = \{\sigma(a), \sigma(b)\}$.

Cela nous donne une représentation de $\mathbb{R}^{10}$ de d° 10 obtenue par permutation des vecteurs de base. On remarque :

→ (123) ne laisse que $\{4,5\}$ invariant

→ (12)(34) ne laisse que $\{1,2\}$ et $\{3,4\}$ invariant

Donc $\chi_{\mathbb{R}^{10}} = (10, 1, 2, 0, 0)$.

$\langle \chi_{\mathbb{R}^{10}}, \chi_{triv} \rangle = 1$
$\langle \chi_{\mathbb{R}^{10}}, \chi_{stand} \rangle = 1$ donc ces deux rpt apparaissent une unique fois dans $\mathbb{R}^{10}$

On a $\mathbb{R}^{10} = \underset{\uparrow \, \rho_{triv}}{X} \oplus \underset{\uparrow \, \rho_{sgn}}{Y} \oplus Z$ et en regardant ces caractères sur la classe de Identité, on a $Z$ associé à une rpt de d° 5.

$\chi_5 = \chi_{\mathbb{R}^{10}} - \chi_{tr} - \chi_{std} = (5, -1; 1; 0, 0)$. On obtient la ligne

| $S_4$ | Id | (123) | (12)(34) | (12345) | (21345) |
|---|---|---|---|---|---|
| $\chi_5$ | 5 | -1 | 1 | 0 | 0 |

## 4 : Les deux derniers caractères :

On utilise le fait que $\langle \chi_3, \chi_3 \rangle = 1 = \langle \chi_3', \chi_3' \rangle$
et l'orthogonalité des caractères pour crée un système d'équations qui donne

| $S_4$ | Id | (123) | (12)(34) | (12345) | (21345) |
|---|---|---|---|---|---|
| $\rho_{triv}$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $\rho_{stand}$ | 4 | 1 | 0 | $-1$ | $-1$ |
| $\rho_3'$ | 3 | 0 | $-1$ | $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ | $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ |
| $\rho_3$ | 3 | 0 | $-1$ | $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ | $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ |
| $\rho_5$ | 5 | $-1$ | 1 | 0 | 0 |

et hormis le caractère trivial $\chi_{triv}$, $\chi(g) \neq \chi(Id)$ pour tout caractère irréductible de $A_5$ !

Table de $S_4$:

| | Id | (12) | (123) | (1234) | (12)(34) |
|---|---|---|---|---|---|
| $\rho_{triv}$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $\rho_{sgn}$ | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 |
| $\rho_{stand}$ | 3 | 1 | 0 | -1 | -1 |
| $\rho_4$ | 3 | -1 | 0 | 1 | -1 |
| $\rho_5$ | 2 | 0 | -1 | 0 | 2 |

Thm $H \trianglelefteq S_4 \iff H = \bigcap_{i \in I} K_{\chi_i}$

$K_{\chi_{triv}} = G$

$K_{\chi_{sgn}} = A_4$

$K_{\chi_{stand}} = \{Id\} = K_{\chi_4}$

$K_{\chi_5} = V_4$

$G \cap A_4 = A_4$

$G \cap V_4 = V_4$

$A_4 \cap V_4 = V_4$

$G \cap A_4 \cap V_4 = V_4$

donc $H \trianglelefteq S_4 \iff H = \begin{cases} \{Id\} \\ A_4 \\ V_4 \\ G \end{cases}$