Ref : Caldero, voyage en Algèbre p. 114.

Développement : $GL_n(\mathbb{C})$ est dense, ouvert, connexe dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

leçon 106
150
152
204
(208)

Théorème :

Soit $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On munit $GL_n(\mathbb{K})$ de la topologie normique de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $GL_n(\mathbb{K})$ est ouvert, dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et $GL_n(\mathbb{C})$ connexe dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Preuve :

▶ 1 : $GL_n(\mathbb{K})$ ouvert dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

D'après la formule du déterminant, $\det : A \longmapsto \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) . a_{\sigma(1),1} \times \cdots \times a_{\sigma(n),n}$

l'application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est somme et produit de coefficients de A.

Elle est donc polynômiale en les coefficients de A, donc continue.

Or $GL_n(\mathbb{K}) = \det^{-1}(\mathbb{K}^*)$, et $\mathbb{K}^*$ ouvert de $\mathbb{K}$.

▶ 2 : $GL_n(\mathbb{K})$ dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrons qu'il existe une suite $(A_k)_k$ de matrices de $GL_n(\mathbb{K})$ qui converge vers A.

- Si A inversible, on prend la suite constante $(A_k)_k = A$
- Si A non inversible, alors $\det(A) = 0$ et 0 est valeur propre de A.

De plus, $\exists s > 0$ tq $0 < |\lambda| < \frac{1}{s} \Rightarrow \lambda$ non vp de A.

(En effet, considérons $Sp(A) \setminus \{0\}$, fini et éventuellement vide. S'il est non vide, il possède un élément minimal non nul m, et tout entier $s > \frac{1}{m}$ convient. S'il est vide alors tout entier $s > 0$ convient).

La suite $(A - \frac{1}{k} I_n)_{k > s}$ est donc bien une suite de $GL_n(\mathbb{K})$, car sinon $\frac{1}{k}$ serait valeur propre de A. De plus cette suite tend vers A.

▶ 3 : $GL_n(\mathbb{C})$ connexe par arc dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Soit $A, B \in GL_n(\mathbb{C})$ et on veut construire un chemin dans $GL_n(\mathbb{C})$ reliant A à B.

* $\det : M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, $A \mapsto \det A$ est polynomiale en les coefficients de A. Par conséquent, $P : [0,1] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \det(A(1-t)+tB)$ est polynomiale en t. De plus, $P(0) = \det(A) \neq 0$ car $A \in Gl_n(\mathbb{C})$. Ainsi P non nul.

* P étant non nul, il possède un nombre fini de 0 dans $\mathbb{C}$. On peut donc tracer dans $\mathbb{C}$ un chemin γ reliant 0 à 1 évitant les 0 de P. Construisons γ.

Soit α_m la racine de P tq sa partie imaginaire $\mathrm{Im}(\alpha_m)$ soit minimale non nulle : α_m existe par finitude de l'ensemble des 0 et en posant $\alpha_m = i$ si toutes les racines sont réelles pures. Alors le chemin

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$$
$$t \mapsto \begin{cases} t + it.\,\mathrm{Im}(\alpha_m) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ t + i(1-t)\,\mathrm{Im}(\alpha_m) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

- En effet, $t = 0$ et 1 n'annulent pas P (car A et $B \in Gl_n(\mathbb{C})$) et de plus $\forall t \in]0,1[$, $\gamma(t)$ ne peut pas être racine de P car $0 < \mathrm{Im}(\gamma(t)) < \frac{1}{2}\mathrm{Im}(\alpha_m) < \mathrm{Im}(\alpha_m)$.

* Soit $\alpha : [0,1] \to Gl_n(\mathbb{C})$, $t \mapsto (1-\gamma(t))A + \gamma(t)B$ — α est continue car γ l'est, et est bien à valeurs dans $Gl_n(\mathbb{C})$, car le déterminant de la matrice associée ne s'annule pas.

On a ainsi construit un arc connexe reliant A à B, dans $Gl_n(\mathbb{C})$.

Remarque sur le dev :

1. Connexe par arc $\Rightarrow$ connexe

En effet, A est connexe si :

1) A n'est pas la réunion de deux ouverts non vides disjoints

$\Updownarrow$

2) A n'est pas la réunion de deux fermés non vides disjoints

$\Updownarrow$

3) les seuls ouverts et fermés de A sont A et $\emptyset$

$\Updownarrow$

4) Toute appli continue de A dans un ensemble à deux éléments muni de la topologie discrète est constante.

Ainsi, A connexe par arc $\Rightarrow$ A réunion des chemins dans une partie ayant tous une même origine fixée

$\Rightarrow$ A connexe.

En effet, toute famille, finie ou infinie, de parties connexes de A dont l'intersection est non vide a sa réunion connexe.

⚠ contrex : $f :]0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est continue sur $]0,1]$.

Son graphe est connexe comme graphe d'une fct continue sur un intervalle réel, donc son adhérence également. Mais C n'est pas connexe par arc.

2. Un contrexemple. $Gl_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe dans $M_n(\mathbb{R})$.

En effet, $\det : Gl_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$ est surjective. Mais $\mathbb{R}^*$ n'est pas connexe !

Par contre $\det : Gl_n^+(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{+*}$ continue et $Gl_n^+(\mathbb{R})$ connexe.

3. Des applications :

1) Les pol. car de AB et BA sont égaux : $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ $\forall A,B \in M_n(K)$.

En effet, si A est inversible, $\chi_{AB} = \chi_{A^{-1}(AB).A} = \chi_{BA}$.

le pol car est un invariant sous l'action de conjugaison

Si A non inversible, on conclut par densité.

2) L'existence de la décomposition polaire dans $GL_n(\mathbb{R})$ implique l'existence de la décomp polaire dans $M_n(\mathbb{R})$. On perd l'unicité de la décomposition : Regarder par ex la matrice nulle

3) La connexité se transporte par les applications continues. Ainsi, une action de groupe continue (⚠ par obligatoire...) préserve la connexité de $GL_n(\mathbb{C})$.

ex : O_r l'ensemble des matrices de rang r dans $\mathbb{C}$ forme une seule orbite pour l'action de Steinitz de $GL_m(\mathbb{C})$ dans $GL_n(\mathbb{C})$ sur l'espace $M_{m,n}(\mathbb{C})$. On en déduit la connexité de O_r.