Théorème de Burnside :

Lemme : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tq $Tr(A^k) = 0$ $\forall k \in \mathbb{N}^*$. Alors A nilpotente.

Preuve :

Le polynôme caractéristique de A est scindé sur $\mathbb{C}$. Raisonnons par l'absurde et supposons que A est non nilpotente. Si A n'admettait que des valeurs propres nulles, alors son polynôme caractéristique serait X^n, et alors A serait nilpotente. Ainsi A possède des valeurs propres (complexes) non nulles. Notons les $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ($n \geq 1$) et notons $n_1, \dots, n_n$ leur multiplicité. $\forall k \geq 1$, on a

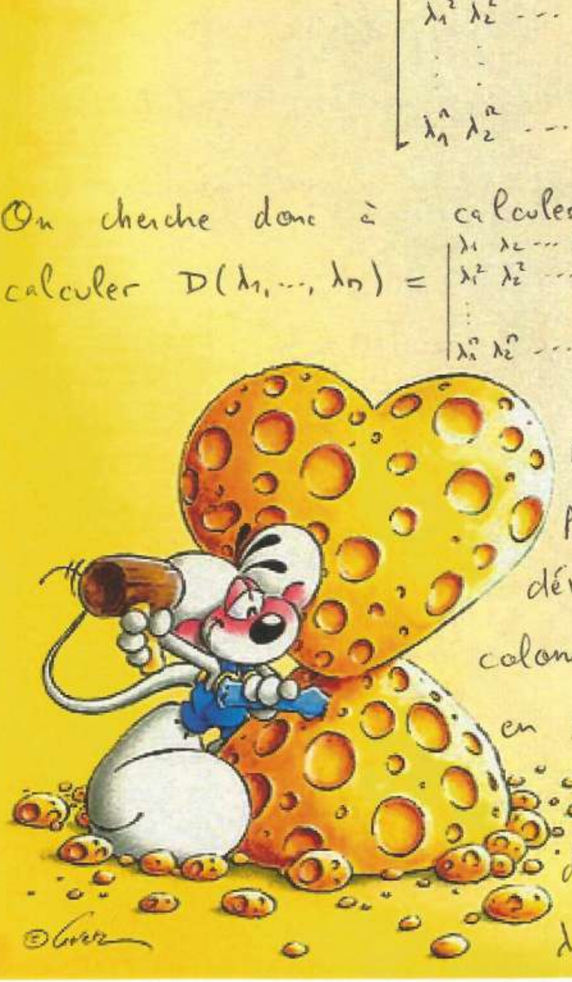
$$Tr(A^k) = n_1 \lambda_1^k + \dots + n_n \lambda_n^k = 0$$

En écrivant cette relation pour k allant de 1 à n, on obtient que $(n_1, \dots, n_n)$ est solution du système linéaire

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^n & \lambda_2^n & \cdots & \lambda_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = 0$$

On cherche donc à calculer le déterminant de la matrice, c.à.d. calculer

$$D(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & & & \\ \lambda_1^n & \lambda_2^n & \cdots & \lambda_n^n \end{vmatrix} = \lambda_1 \times \dots \times \lambda_n . \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & & & \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = \lambda_1 \cdots \lambda_n . V(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$



Posons $P(X) = V(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, X)$. C'est un polynôme de degré au plus $n-1$. Le développement par rapport à la dernière colonne permet de constater que le coefficient en X^{n-1} est $V(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$. De plus, si on remplace X par λ_i ($1 \leq i \leq n-1$), deux colonnes deviennent identiques et alors $P(\lambda_i) = 0$. Les λ_i étant deux à deux distincts, on a

P divisible par $\prod_{i=1}^{n-1}(X-\lambda_i)$, polynôme unitaire de degré $n-1$. Il en résulte que $P(X) = v(\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1}) \cdot \prod_{i=1}^{n-1}(X-\lambda_i)$ et en particulier, $P(\lambda_n) = v(\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1}) \cdot \prod_{i=1}^{n-1}(\lambda_n-\lambda_i)$.

On obtient donc par récurence la formule

$$v(\lambda_1,\dots,\lambda_n) = \prod_{1\leq i<j\leq n}(\lambda_j-\lambda_i)$$

et ainsi $D(\lambda_1,\dots,\lambda_n) = \lambda_1\cdots\lambda_n \prod_{1\leq i<j\leq n}(\lambda_i-\lambda_j) \neq 0$.

Ainsi nécessairement, $m_1 = \dots = m_n = 0$, ce qui est exclus. ∎

Théorème (de Burnside)

Un sous groupe G de $GL_n(\mathbb{C})$ d'exposant fini (ie $\exists N \in \mathbb{N}^*$ tq $A^N = Id$ $\forall A \in G$) est fini.

Preuve :

Soit G un sous groupe de $GL_n(\mathbb{C})$, $(M_i)_{1\leq i\leq m} \in G^m$ une base de $Vect(G)$ et
$$f : \begin{array}{l} G \longrightarrow \mathbb{C}^m \\ A \longmapsto (tr(A.M_i))_{1\leq i\leq m} \end{array}$$

. Montrons que $f(A) = f(B) \Rightarrow AB^{-1} - I_n$ nilpotente :

Posons $D = AB^{-1}$. Par linéarité de la trace, on a $Tr(AM) = Tr(BM)$ pour toute matrice $M \in Vect(G)$, et en particulier $\forall M \in G$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$Tr(D^k) = Tr(A\underbrace{B^{-1}D^{k-1}}_{\in G}) = Tr(BB^{-1}D^{k-1}) = Tr(D^{k-1})$$

et donc $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $Tr(D^k) = Tr(I_n) = n$.

Ainsi $\forall k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathrm{Tr}(D - I_n)^k \underset{\substack{\uparrow \\ D \text{ et } I_n \\ \text{commutent}}}{=} \mathrm{Tr}\left(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j D^{k-j}\right) = n \cdot \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \cdot (-1)^j \underset{\substack{\uparrow \\ \text{encore le} \\ \text{binôme}}}{=} n \cdot (1-1)^k = 0$$

On a donc le résultat avec le lemme.

- Soit G sous groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ d'exposant fini N. Toute matrice $A \in G$ est annulée par le polynôme $X^N - 1$ scindé à racines simples. Ainsi toute matrice de G est diagonalisable.

Montrons maintenant que f est injective :

Soit $A, B \in G$ tq $f(A) = f(B)$. La matrice $D = AB^{-1}$ est dans G. Elle est donc diagonalisable, et donc $D - I_n$ est aussi diagonalisable. Comme on sait que cette matrice est nilpotente, on a qu'elle est nulle, i.e. $D = I_n$, i.e. $A = B$. On a donc bien f injective.

Posons $X = \{\mathrm{Tr}(A) \, ; \, A \in G\}$. Nous allons mq X fini, ce qui nous donnera G fini : L'image de f est incluse dans X^m

Or les valeurs propres des éléments de G appartiennent à $\mathbb{U}_N$, l'ensemble des racines $N^{\text{ième}}$ de l'unité.

Donc X est fini. ■

Question du jury :

- Donnez un exemple de groupe infini d'exposant fini :
  ↳ $(\mathbb{F}_2[X], +)$ infini d'exposant 2.

- Que se passe-t-il si on se place dans $GL_n(\mathbb{F}_p)$?
  ↳ problème dans le lemme lors de la résolution du système : $(m_1, \dots, m_n) = (0, \dots, 0)$ dans $\mathbb{F}_p$ $\not\Rightarrow$ $(m_1, \dots, m_n) = (0, \dots, 0)$ dans $\mathbb{N}$.