ref: Gourdon

Décomposition de Dunford:

leçons 153
154
155
156
157

Théorème (Dunford):

Soit un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$, qui annule un polynôme scindé sur $\mathbb{K}$. Il existe un unique couple (d, n) d'endomorphismes tq :

i) $u = d + n$

ii) d est diagonalisable et n nilpotent

iii) d et n commutent

De plus, d et n sont des polynômes en u.

Lemme:

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ polynôme annulateur de u. $P = \beta . M_1^{\alpha_1} \dots M_s^{\alpha_s}$ la décomposition en facteurs irréductibles de $\mathbb{K}[X]$. $\forall i \in [\![1, s]\!]$, on pose $N_i = \ker M_i^{\alpha_i}(u)$. On a alors

$$E = \bigoplus_{i=1}^{s} N_i$$

et $\forall i$, la projection sur N_i parallèlement à $\bigoplus_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{s} N_j$ est un polynôme en u.

Preuve du lemme:

. Les $M_i^{\alpha_i}$ étant premiers entre eux, on a $E = \bigoplus_{i=1}^{s} N_i$ par le lemme des noyaux.

. $\forall i$, notons $Q_i = \prod_{j \neq i} M_j^{\alpha_j}$. Les Q_i étant globalement premiers entre eux, on a par l'égalité de Bézout

$\exists\, U_1, \dots, U_s \in \mathbb{K}[X]$ tq $\sum_{i=1}^{s} U_i Q_i = 1$
autrement dit $Id_E = \sum_{i=1}^{s} U_i(u) \circ Q_i(u)$

$\forall i$, on pose $P_i = U_i Q_i$ et $p_i = P_i(u)$.
En reformulant, on a donc
$$\boxed{Id_E = \sum_{i=1}^{s} p_i} \quad (*)$$

Par ailleurs, $\forall i \neq j$, on a $P \mid Q_i Q_j$ donc
$\forall i \neq j$, $p_i \circ p_j = Q_i \quad Q_j(u) \circ U_i U_j(u)$
$= 0$
En composant par p_i dans $(*)$, on obtient donc $p_i = p_i^2$, donc p_i est un projecteur.

- Mq $\forall i$, $\mathrm{Im}\, p_i = N_i$
  - Soit $y = p_i(x) \in \mathrm{Im}\, p_i$. On a :
    $M_i^{\alpha_i}(u)(y) = M_i^{\alpha_i}(u) \circ P_i(u)(x) = U_i(u) \circ P(u)(x) = 0$
    et donc $\mathrm{Im}\, p_i \subset \ker M_i^{\alpha_i}(u) = N_i$.
  - Réciproquement soit $x \in N_i = \ker M_i^{\alpha_i}(u)$. Par $(*)$, $x = p_1(x) + \dots + p_s(x)$.
    Or $\forall j \neq i$, $p_j(x) = U_j(u) \circ Q_j(x) = 0$ car $M_j^{\alpha_j}(x) = 0$, donc
    $x = p_i(x) \in \mathrm{Im}\, p_i$.

- Mq $\forall i$, $\ker p_i = \bigoplus_{j \neq i} N_j$
  - $\forall j \neq i$, on a $N_j \subset \ker p_i$ car si $x \in N_j$, alors $p_i(x) = U_i(x) \circ Q_i(u)(x) = 0$ car $M_j^{\alpha_j}$ divise Q_j. Ainsi $\bigoplus_{j \neq i} N_j \subset \ker p_i$.
  - Réciproquement, $\forall x \in \ker p_i$, on a par $(*)$ $x = \sum_{j \neq i} p_j(x)$ donc $x \in \bigoplus_{j \neq i} N_j$.

Preuve du théorème :

Existence : Ecrivons $\chi_u = \prod_{i=1}^{s} (X-\lambda_i)^{\alpha_i}$ et pour tout i, notons $N_i = \ker(u-\lambda_i)^{\alpha_i}$. Notre lemme s'applique avec $P = \chi_u$ et pour $M_i = (X-\lambda_i)$, $\forall i$. En reprenant les notations précédentes, $p_i = P_i(u)$ est le projecteur sur N_i parallèlement à $\bigoplus_{j\neq i} N_j$.

Posons $d = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i p_i$ et $n = u - d = \sum_{i=1}^{s} (u - \lambda_i \, Id) p_i$

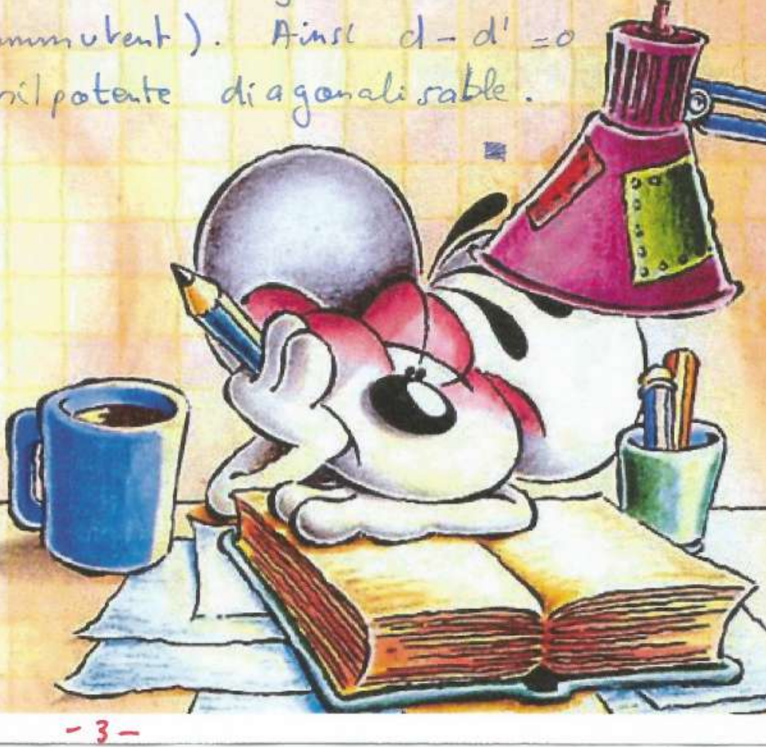
Les endomorphismes d et n sont bien des polynômes en u, ils commutent donc entre eux. Ensuite d est diagonalisable en prenant une base de la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^{s} N_i$. Par récurrence immédiate, on a également

$$n^q = \sum_{i=1}^{s} (u - \lambda_i \, Id)^q p_i$$

qui est nul pour $q = \max_{i \in [\![1,s]\!]} \alpha_i$, donc n est nilpotent.

Unicité : Soit (d, n) et (d', n') deux "couples de Dunford".
d' et n' commutent avec $d' + n'$ donc commutent avec u.
Ainsi d' et n' commutent avec d et n qui sont polynômes en u.

Ainsi, d et d' sont codiagonalisables. $u = d + n = d' + n'$
$\Rightarrow d - d' = n' - n$, d'où $n' - n$ diagonalisable et nilpotente (car n et n' commutent). Ainsi $d - d' = 0$ qui est la seule matrice nilpotente diagonalisable.



Exercice Dunford :

1) $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

$\chi_A(X) = (X-3)^3$. Par Cayley Hamilton, $(A - 3\,Id)^3 = 0$, donc $A - 3\,Id$ est nilpotent ! Donc $A = \underbrace{3\,Id}_{D} + \underbrace{A - 3\,Id}_{N}$.

2) Calculer $\exp(M)$ avec $M = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$. $M^2 = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -14 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & -4 & -10 \end{bmatrix}$

$(M - 2\,Id)^2 = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & -3 \\ -1 & 4 & -2 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 3 & -20 & -6 \\ 3 & -8 & 12 \\ 3 & -20 & -6 \end{bmatrix}$

① $\chi_M(X) = (X-2)^2(X-3)$

② On cherche U_2 et U_3 tq $\sum_{i \in \{2,3\}} U_i Q_i = 1$, avec $Q_2 = (X-3)$
$Q_3 = (X-2)^2$

↳ Bézout.

$X^2 - 4X + 4$	$X - 3$	-17
	$X - 7$	
1	0	1
0	1	$7 - X$

d'où $(X-2)^2 + (7-X)(X-3) = -17$

d'où $-\frac{1}{17}(X-2)^2 + \frac{X-7}{17}(X-3) = 1$ et on a notre couple de Bézout !

$U_2 = -\frac{1}{17}$ $\qquad U_3 = \frac{X-7}{17}$

③ $p_2 = U_2 \cdot Q_2(A) = \frac{3-X}{17}(A) = \frac{3\,Id - A}{17} = \frac{1}{17} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix}$

$p_3 = U_3 \cdot Q_3(A) = \frac{A - 7\,Id}{17} \cdot (A - 2\,Id)^2 = \frac{1}{17} \cdot \begin{bmatrix} -6 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & -3 \\ -1 & 4 & -7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -20 & -6 \\ 3 & -8 & 12 \\ 3 & -20 & -6 \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{17} \begin{bmatrix} -12 & 128 & \\ -12 & & \\ -12 & & \end{bmatrix}$ etc...

ou $\frac{1}{(X-3)(X-2)^2} = \frac{1}{X-3} - \frac{1}{(X-2)^2} - \frac{1}{X-2}$

$= \frac{1}{X-3} - \frac{X-1}{(X-2)^2}$

donc $\underset{\substack{\uparrow \\ U_3 = 1}}{(X-2)^2} - \underset{\substack{\uparrow \\ U_2 = -(X-1)}}{(X-1)}(X-3) = 1$

Question : Mq deux polynômes du même endomorphisme commutent :

$P \mapsto P(u)$ morphisme de $\mathbb{K}$ algèbre i.e $\begin{cases} (\lambda P + \mu Q)(u) = \lambda P(u) + \mu Q(u) \\ (P.Q)(u) = P(u) \circ Q(u) \end{cases}$

Or l'image de ce morphisme est une sous algèbre abélienne de $\mathcal{L}(E)$

(en effet la commutativité est tjrs transportée par un morphisme et que les polynômes forment une algèbre commutative.

Question : Preuve thm de codiagonalisation ?

sens dur : Soit A, B diag qui commutent. u, v le endo canoniquement liés à A et B.

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les vp liés à u d'espace propre $E_1, \dots, E_r$.

u diag donc $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$

u et v commutent $\Rightarrow$ E_i stable par v. $v_{|E_i}$ est diag vu que v l'est.

Notons B_i base de vp de $v_{|E_i}$ et $B = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$ base de $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$

Alors u et v diagonales dans B.

Question nilpotente + diagonalisable = matrice nulle :

A diagonalisable $\Rightarrow \exists P \in GL_n(\mathbb{R})$ tq $A = P^{-1} D P$

A nilpotente $\Rightarrow \exists k \geq 0$ tq $A^k = 0$.

Donc $\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{A^k} = (P^{-1} D P)^k = P^{-1} D^k P \Rightarrow D = 0$

Rem toute matrice sym réelle est diag donc marche aussi pour matrice sym réelle et nilpotente