ref : F.G.N, algèbre 1

leçon 153

Dual de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Théorème : $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$, $A \longmapsto (f_A : X \mapsto \mathrm{tr}(AX))$ réalise un isomorphisme entre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et son dual.

Preuve :

Notons (E_{ij}) la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $f_A : X \mapsto \mathrm{tr}(AX)$. La linéarité de la trace et la bilinéarité du produit matriciel donnent la linéarité de f_A donc de f. Par ailleurs, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$ sont de même dimension n^2. Il suffit donc de montrer que f est injective.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tq $f_A = 0$ (i.e. $f(A) = 0$).

Alors $\forall i,j \in [\![1,n]\!]$:

$$0 = \mathrm{tr}(A.E_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} (A.E_{ij})_{k,k} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{produit matriciel}}}{=} \sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{l=1}^{n} a_{kl}\, E_{lk} \underbrace{\delta_{il}\,\delta_{jk}}_{\text{condition pour que } E_{lk} \text{ représente } E_{ij}}\Big) = a_{ji}$$

Finalement, $A = 0$ donc f injectif. C'est donc un isomorphisme.

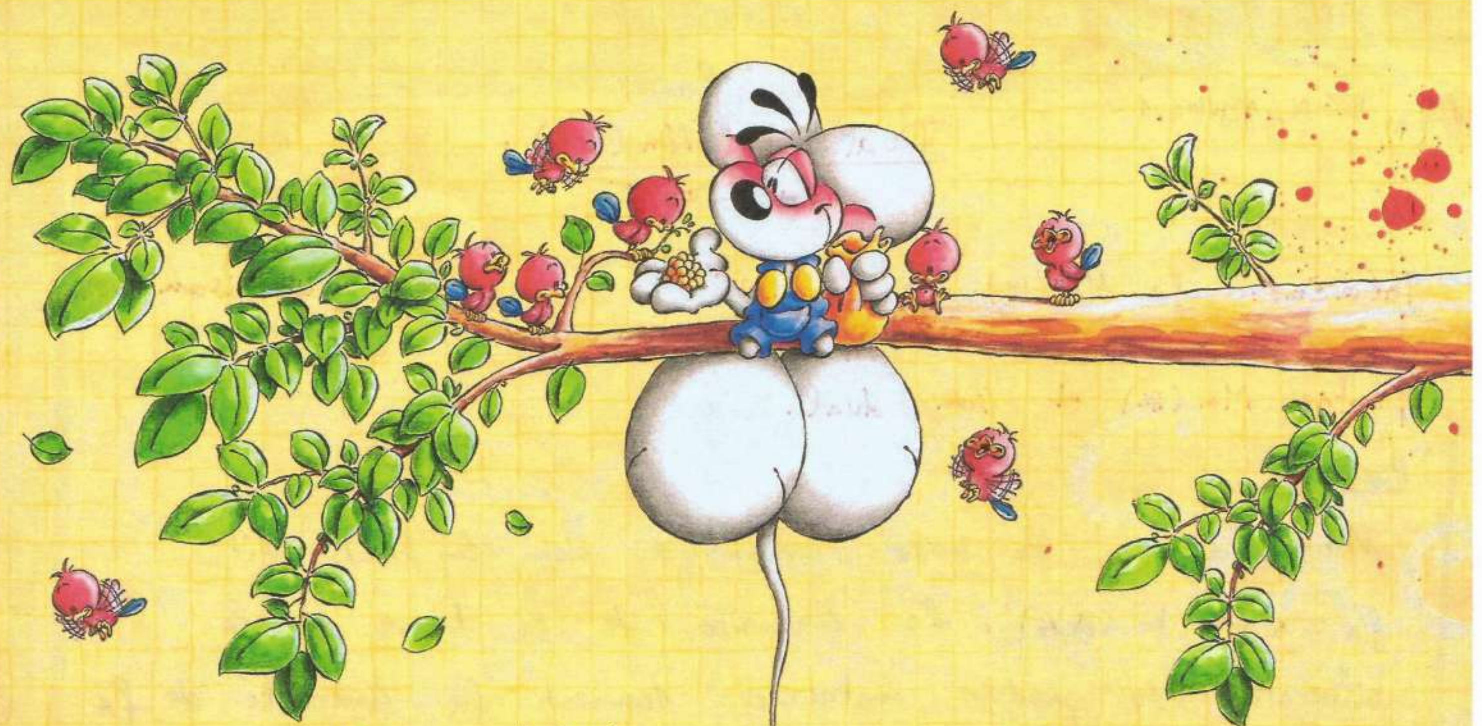
Corollaire : (caractérisation de la trace)

Soit $g \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$ vérifiant $\forall (X,Y) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, $g(XY) = g(YX)$. Alors g est proportionnel à la trace : $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ tq $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $g(X) = \lambda . \mathrm{tr}(X)$.

Preuve :

Par le théorème précédent, $\exists A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tq $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $g(X) = \mathrm{tr}(AX)$. On par hypothèse sur g,

$$\forall X,Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \mathrm{tr}(AXY) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{hypothèse}}}{=} \mathrm{tr}(AYX) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{prop trace}}}{=} \mathrm{tr}(XAY).$$



On en déduit que $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\forall Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$tr(AXY) - tr(XAY) = 0$ donc $\forall X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $tr(AXY - XAY) = 0$ **donc** $\forall X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $tr((AX - XA)Y) = 0$

L'isomorphisme précédent nous donne alors :

$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $AX - XA = 0$ càd $A \in Z(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$: A est un élément central de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. En conséquence, A est une homothétie*.

* Deux preuves que $Z(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$ sont les homothéties :

① $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $AX - XA = 0$. On applique aux $X = E_{ij}$ et on obtient que A est diagonale avec que les même coefficients diagonaux. Ainsi A est une homothétie. Réciproquement, $A = \lambda \, Id \Rightarrow AX = XA$.

② Soit u un endo de $Z(\mathcal{L}(E))$. On veut mq u homothétie. Il suffit de mq $u(x)$ et x sont colinéaires $\forall x \in E$. Soit $x \in E$. Soit p la projection sur $\mathbb{K}x$ parallèlement à un supplémentaire de cette droite. Alors

$u(x) = u(p(x)) \underset{\substack{\uparrow \\ u \text{ central}}}{=} p(u(x)) \in \mathbb{K}x$. ▪

<u>Corollaire :</u>

Si $n \geq 2$, tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ rencontre $GL_n(\mathbb{K})$.

<u>Preuve :</u>

Soit H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, soit φ forme linéaire de noyau H. Ainsi $\exists A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tq $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\varphi(X) = tr(AX)$. On cherche donc $X \in GL_n(\mathbb{K})$ tq $tr(AX) = 0$.

Notons r le rang de A. Ainsi A équivaut à $J_r = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ avec $J_r \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, càd $\exists P, Q \in GL_n(\mathbb{K})$ tq $A = P.J_r.Q$.

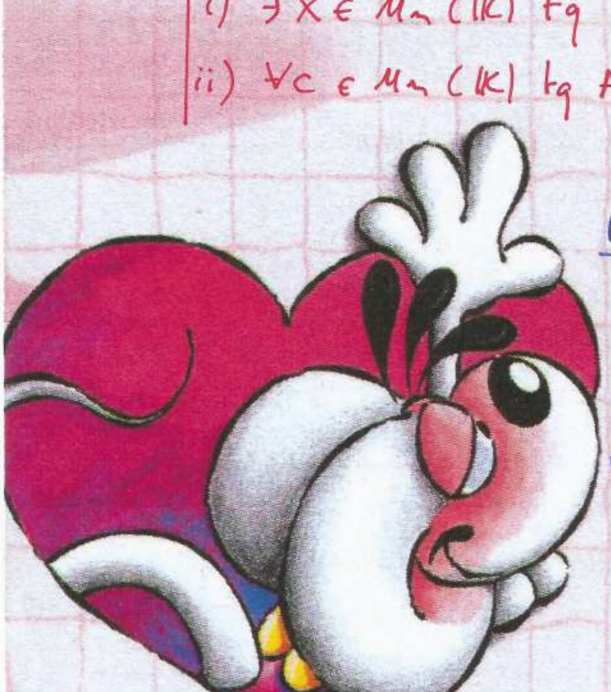
$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $tr(AX) = tr(P.J_r.Q.X) = tr(J_r.Q.X.P)$.

L'idée est de trouver $Y \in GL_n(\mathbb{K})$ tq $tr(J_r.Y) = 0$, on posera alors $X = Q^{-1} Y P^{-1}$ qui sera dans $GL_n(\mathbb{K}) \cap H$. Par exemple, $Y = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & & & \vdots \\ & \ddots & & \\ 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix}$ suffit, car inversible ($\det = (-1)^{n+1}$) et $J_r.Y$ de trace nulle.

<u>Corollaire :</u> Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors s'équivalent :

i) $\exists X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tq $AX + XA = B$

ii) $\forall C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tq $AC + CA = 0$, on a $tr(BC) = 0$.

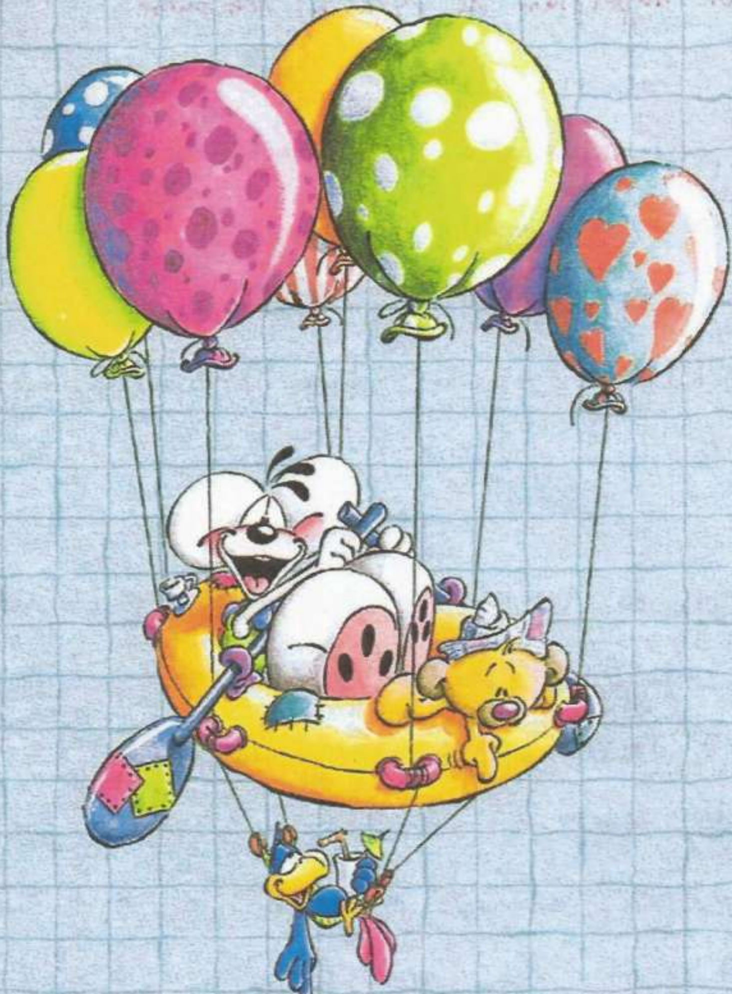


<u>Preuve :</u> On pose $h : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & AX + XA \end{array}$

Alors (i) $\Leftrightarrow B \in Im(h)$

et (ii) $\Leftrightarrow \forall C \in Ker(h)$, $f_C(B) = 0 \Leftrightarrow B \in f(Ker(h))^{\circ}$

notation de l'orthogonal dual



Mais $\dim f(\ker(h))^\circ = n^2 - \dim(f(\ker h)) = n^2 - \dim(\ker h) \overset{\text{thm du rang}}{=} \dim(\operatorname{im} h)$

Il suffit donc de montrer $\operatorname{Im} h \subset f(\ker h)^\circ$, on aurra ainsi $\operatorname{Im} h = f(\ker(h))^\circ$.

Soit $D \in \operatorname{Im} h$, disons $D = AY + YA$, $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Alors $\forall C \in \ker(h)$,
$$
\begin{aligned}
f_C(D) &= \operatorname{tr}(CD) = \operatorname{tr}(C(AY+YA)) \\
&= \operatorname{tr}(CAY) + \operatorname{tr}(CYA) \\
&= \operatorname{tr}(CAY) + \operatorname{tr}(ACY) \\
&= \operatorname{tr}((CA+AC)Y) \\
&= 0
\end{aligned}
$$
donc $D \in f(\ker(h))^\circ$. Ainsi $(i) \Leftrightarrow (ii)$.