Gantmacher
tome 2

Détermination du nombre de racines réelles et complexes distinctes d'un polynôme :

Thm : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme réel de degré n de racines distinctes $\alpha_1, \dots, \alpha_q$ de multiplicités $n_1, \dots, n_q$.

On pose $s_p = \sum_{j=1}^{q} n_j \alpha_j^p$ si $p \in \mathbb{N}$

et $S_n(x) = \sum_{i,k=0}^{n-1} s_{i+k}\, x_i x_k$. S_n est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ car $P \in \mathbb{R}[X]$ donc $s_p \in \mathbb{R}$.

Alors si (p, q) est la signature de S_n, le nombre de racines réelles de P est $p-q$
et le nombre de racines complexes de P est $p+q$.

dém : ① $S_n(x) = \sum_{i,k=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{q} n_j \alpha_j^{i+k} x_i x_k = \sum_{j=1}^{q} n_j \left(\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_j^i x_i \right)^2$

Posons $l_{\alpha_j} : x \mapsto \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_j^i x_i$.

Soit j tel que α_j soit dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Écrivons $l_j = \widetilde{\alpha_j} + i\widetilde{\beta_j}$
Soit j' tel que $\alpha_{j'} = \overline{\alpha_j}$.

On a alors $n_j l_j^2 + n_{j'} l_{j'}^2 = n_j \left(l_j^2 + \overline{l_{j}}^2 \right)$

Posons J tq $J' = \{j' ; j \in J\}$ et $J \cup J' = \{j, \alpha_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}\}$. $= 2 n_j \widetilde{\alpha_j}^2 - 2 n_j \widetilde{\beta_j}^2$.

donc $S_n(x) = \sum_{\substack{j=1 \\ \alpha_j \in \mathbb{R}}}^{q} n_j l_{\alpha_j}^2 + 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \in J}}^{q} n_j \widetilde{\alpha_j}^2 - 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \in J}}^{q} n_j \widetilde{\beta_j}^2$.

② Vérifions que les formes linéaires l_{α_j}, $\widetilde{\alpha_j}$ et $\widetilde{\beta_j}$ sont linéairement indépendantes.

Il s'agit de remarquer que le déterminant de la matrice

$$\begin{array}{ccc} \overbrace{\qquad}^{\alpha_j \in \mathbb{R}} & \overbrace{\qquad}^{j \in J} & \overbrace{\qquad}^{j \in J} \\ \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \alpha_j & \frac{\alpha_j + \overline{\alpha_j}}{2} & \frac{\alpha_j - \overline{\alpha_j}}{2i} \\ \alpha_j^2 & | & | \\ | & | & | \\ \alpha_j^{q-1} & \frac{\alpha_j^{q-1} + \overline{\alpha_j}^{q-1}}{2} & \frac{\alpha_j^{q-1} - \overline{\alpha_j}^{q-1}}{2i} \end{bmatrix}$$

est non nul.

En effectuant des opérations élémentaires sur les colonnes, on se ramène au déterminant

$$\begin{array}{ccc} j\in B & j\in J & j\in J \\ \left|\begin{matrix} \alpha_j^{\,i} & \alpha_j^{\,i} & \overline{\alpha_j^{\,i}} \end{matrix}\right| \end{array}$$

qui est non nul (c'est un déterminant de Vandermonde et les α_j sont distincts).

Ainsi les ℓ_{α_j}, $\tilde{\alpha}_j$ et $\tilde{\beta}_j$ sont linéairement indépendants.

La signature de S_n est donc

$$\left(\left|\{j, \alpha_j \in \mathbb{R}\}\right| + \frac{1}{2}\left|\{j, \alpha_j \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}\}\right|, \ \frac{1}{2}\left|\{j, \alpha_j \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}\}\right| \right)$$

d'où le résultat.

<u>Exemple:</u> $P = X^2 - bX + c$, α_1, α_2 les racines complexes.

On a
$$s_0 = 2$$
$$s_1 = \alpha_1 + \alpha_2 = b$$
$$s_2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = b^2 - 2c$$

donc
$$S_2(x) = 2x_0^2 + 2b\, x_0 x_1 + (b^2 - 2c)x_1^2$$

$$= 2\left(x_0 + \frac{b}{2}x_1\right)^2 + \left(b^2 - 2c - \frac{b^2}{2}\right)x_1^2$$

$$= 2\left(x_0 + \frac{b}{2}x_1\right)^2 + \frac{b^2 - 4c}{2}x_1^2$$

donc la signature de S_2 est $(1,1)$ si $b^2 - 4c < 0$
$(1,0)$ si $b^2 - 4c = 0$
$(2,0)$ si $b^2 - 4c > 0$

et on retrouve le résultat connu.