21

Équation de Burgers généralisée

Proposition Soient $a, u_0 \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on suppose u_0 et u_0' bornées et on pose $c = a \circ u_0$.
Il existe alors $T > 0$ et $u :]-T, T[\times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 qui soit solution du problème

$$(P) : \begin{cases} \partial_t u + a(u).\partial_x u = 0 \\ u(0,\cdot) = u_0 \text{ sur } \mathbb{R} \end{cases}$$

- Étape 1 : courbes caractéristiques

Soit u une solution de (P), $x \in \mathbb{R}$. On considère la courbe caractéristique :

$$(C_x) : \{(t, y(t)) \mid y'(t) = a(u(t, y(t))),\ y(0) = x\}$$

Sur (C_x), on a :

$$\frac{d}{dt}[u(t,y(t))] = \partial_t u(t,y(t)) + \partial_x u(t,y(t)).y'(t) = (\partial_t u + a(u).\partial_x u)(t, y(t)) = 0.$$

Donc :

u est constante sur (C_x), on en déduit que y' est constante.

Alors :

$$y(t) = y(0) + ty'(0) = x + t.c(x)$$

- Étape 2 : détermination de T

En dérivant c, $c' = u_0'.a' \circ u_0$.

Or :

u_0 est bornée et a' est continue donc $a' \circ u_0$ est bornée, u_0' est bornée. — $a' \circ u_0$ inclus dans un compact

On pose alors :

$$M := \sup |c'| < +\infty \quad \text{et} \quad T := \begin{cases} +\infty & \text{si } M = 0 \\ 1/M & \text{sinon} \end{cases}$$

- Étape 3 : inversion

On considère $f :]-T, T[\times \mathbb{R} \longrightarrow]-T, T[\times \mathbb{R}$, $(t, x) \longmapsto (t, y = x + tc(x))$.

On a alors :

$$J_f(t,x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c(x) & 1 + tc'(x) \end{pmatrix}$$ de déterminant $1 + t.c'(x) \neq 0$ car $|t.c'(x)| \leqslant |t|.M < 1$ sur $]-T, T[\times \mathbb{R}$

De plus, si $f(t_1, x_1) = f(t_2, x_2)$,

$t_1 = t_2 = t$ et $x_1 + tc(x_1) = x_2 + tc(x_2)$ donc $|x_1 - x_2| = |t| \left| \int_{x_1}^{x_2} c'(x)dx \right| \leqslant M.|t|\,|x_1 - x_2| < |x_1 - x_2|$ i.e. $x_1 = x_2$

Donc f est injective.

Soit à t fixé, $\psi_t : x \longmapsto x + t.c(x)$. On veut montrer que $\psi_t(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. — pour montrer que f est surjective

On a :

$\psi_t'(x) = 1 + tc'(x) > 0$, $\psi_t(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ et $\psi_t(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$, ψ_t continue — $|\psi_t(x) - \psi_t(0)| = |x\, \psi_t'(0)| = |x|\,|1 + tc'(x)| \geqslant |x|\,\big||1| - |tc'(x)|\big| \geqslant |x|(1 - |t|M) \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} +\infty$ et $\psi_t \nearrow$ donc admet limites

Donc $\psi_t(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et f est surjective.

Ainsi, par le théorème d'inversion globale, f est un C^1-difféomorphisme de $]-T, T[\times \mathbb{R}$ sur lui-même, $g := f^{-1}$.

Or ; $u \circ f(t,x) = u_0(x)$ donc $u(t,x) = u_0(\varphi(t,x))$. — on remarque que g est de la forme $(t, \varphi(t,y))$ pour une fonction $\varphi \in C^1$

On a : $(0, \varphi(0,x)) = g(0,x) = g(f(0,x)) = (0,x)$ et $u(t,x) = u(f \circ g(t,x)) = u(f(t, \varphi(t,x))) = u_0(\varphi(t,x))$.

- Étape 4 : Unicité et existence

La fonction φ ne dépend que de a et de u_0, donc $u = u_0 \circ \varphi$ montre l'unicité d'une éventuelle solution.

Vérifions que u ainsi définie est bien solution :

on a $\varphi(f(t,x)) = \varphi(t, x + tc(x)) = x$ d'où :

$$\partial_t \varphi(f(t,x)) + c(x)\partial_x \varphi(f(t,x)) = \partial_t \varphi(t,y) + c(\varphi(t,y)).\partial_x \varphi(t,y) = 0$$

donc :

$$\partial_t u + a(u)\partial_x u = (u_0' \circ \varphi)(\partial_t \varphi + a(u)\partial_x \varphi) = (u_0' \circ \varphi)(\partial_t \varphi + (c \circ \varphi).\partial_x \varphi) = 0$$