Gourdon, page 44

# Connexité - connexité par arcs

**Proposition** Soit $(E,d)$ un espace métrique.
Si $E$ est un espace connexe par arcs, il est alors connexe.

Soit $f : E \longrightarrow \{0,1\}$ une fonction continue, montrons que $f$ est constante.
Soient $x, y \in E$,
il existe un chemin $\gamma : [0,1] \longrightarrow E$ tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$

Alors $f \circ \gamma : [0,1] \longrightarrow \{0,1\}$ est une fonction continue, elle est donc constante par connexité de $[0,1]$.
On a alors :
$f(x) = f\circ\gamma(0) = f\circ\gamma(1) = f(y)$
Ceci étant vérifié pour tous $x, y \in E$, $f$ est constante. Donc $E$ est connexe.

**Contre-exemple** On considère $\Gamma := \bigcup_{x\in\mathbb{Q}} (\{x\}\times\mathbb{R}_+) \cup \bigcup_{x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} (\{x\}\times\mathbb{R}_-^*)$.
Alors, $\Gamma$ est connexe non connexe par arcs.

- Montrons que $\Gamma$ est connexe

On considère une fonction $f : \Gamma \longrightarrow \{0,1\}$ qui soit continue.
On a :
pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\{x\}\times\mathbb{R}_+$ et $\{x\}\times\mathbb{R}_-^*$ connexes par arcs donc connexes
Ainsi :
$\forall x \in \mathbb{Q}$, $f$ est constante sur $\{x\}\times\mathbb{R}_+$, et : $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $f$ est constante sur $\{x\}\times\mathbb{R}_-^*$
On peut donc montrer que $g$ est constante pour montrer que $f$ l'est, avec : $g : x \longmapsto \begin{cases} f(x,0) & \text{si } x\in\mathbb{Q} \\ f(x,-1) & \text{sinon} \end{cases}$

Soit $x_0 \in \mathbb{Q}$,
$\{f(x_0,0)\}$ est un ouvert de $\{0,1\}$ et $f$ est continue donc $f^{-1}(\{f(x_0,0)\})$ est un ouvert ; on obtient alors : $\exists \alpha > 0,\ \forall (x,y) \in (]x_0-\alpha, x_0+\alpha[ \times ]-\alpha,\alpha[) \cap \Gamma$, $f(x,y) = f(x_0,0)$
Donc : si $x\in\mathbb{Q}$, $g(x) = f(x,0) = g(x_0)$
si $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $g(x) = f(x,\frac{-\alpha}{2}) = g(x_0)$
$\forall x \in ]x_0-\alpha, x_0+\alpha[$, $g(x) = g(x_0)$

Soit $x_1 \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ et soit $y_1 < 0$ fixé.
En procédant de manière analogue,
$\exists \beta > 0,\ \forall x \in ]x_1-\beta, x_1+\beta[ \cap \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $f(x,y_1) = f(x_1,y_1) = g(x_1)$
Alors : si $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, OK
si $x \in \mathbb{Q}$, $\exists (x_n)_n \in B(x_0,\alpha)\cap\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, par densité
$x_n \longrightarrow x \Rightarrow g(x) = f(x,0) = \lim f(x_n, \frac{-1}{n}) = g(x_0)$
$\forall x \in ]x_1-\beta, x_1+\beta[$, $g(x) = g(x_1)$

La fonction $g$ est localement constante sur les rationnels et les irrationnels, donc sur $\mathbb{R}$. Par conséquent $g$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc constante car $\mathbb{R}$ est connexe.
l'image récip. d'un singleton est un voisinage de ses points (i.e. un ouvert), donc l'image récip. d'un ouvert est un ouvert comme union d'ouverts

- Montrons que $\Gamma$ n'est pas connexe par arcs

Supposons par l'absurde que $\Gamma$ soit connexe par arcs. Il existe alors une application continue $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ telle que : $\gamma(0) = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\times\mathbb{R}_-^*$, $\gamma(1) = (0,0)$, $\forall t\in[0,1]$ $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \in \Gamma$
On a :
$\gamma_1$ continue donc $\gamma_1^{-1}(\{x_0\})$ est un fermé non vide alors $\alpha := \sup \gamma_1^{-1}(\{x_0\})$ existe et $\gamma_1(\alpha) = x_0$
Donc : $\gamma_1(\alpha) = x_0$, $\forall t \in ]\alpha, 1]$ $\gamma_1(t) \neq x_0$
$\alpha < 1$ car $\gamma_1(1) = 0 \neq x_0$
Alors :
$\gamma_2(\alpha) < 0$ et par continuité de $\gamma_2$ : $\exists \varepsilon > 0,\ \forall t \in [\alpha, \alpha+\varepsilon[$, $\gamma_2(t) < 0$ donc $\gamma_1(t) \notin \mathbb{Q}$
$\gamma$ est à valeurs dans $\Gamma$
Par le théorème des valeurs intermédiaires, $\gamma_1([\alpha,\alpha+\varepsilon[)$ est un intervalle, non réduit à un singleton : absurde !
$\forall t \in ]\alpha,1]$, $\gamma_1(t) \neq x_0$