⑮

Étude relative à la fonction ζ et aux nombres premiers par les probabilités

Gouret - Kurtzmann, page 56
page 462

Proposition On considère, pour $s > 1$, $\zeta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s}$.
Alors : $\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{k=1}^{+\infty} (1 - p_k^{-s})$ où $(p_k)_{k\geq 1}$ est la suite des nombres premiers.

Soit $s > 1$.

On note μ_s la mesure sur $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$ telle que :

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \ \mu_s(\{i\}) = \frac{1}{\zeta(s)\, i^s}$$

On a alors :

$$\mu_s(\mathbb{N}^*) = \mu_s\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} \{i\}\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{\zeta(s)\, i^s} = \frac{\zeta(s)}{\zeta(s)} = 1$$

Ainsi, μ_s est une mesure de probabilité.

Soit p un entier naturel, alors :

$$\mu_s(p\mathbb{N}^*) = \mu_s\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} \{ip\}\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(\{ip\}) = \frac{1}{\zeta(s)\, p^s} \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i^s} = \frac{1}{p^s}$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note A_k l'évènement $p_k \mathbb{N}^*$.

Soient $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}^*$ alors :

par primalité des p_{k_i}, $\bigcap_{i=1}^{n} A_{k_i} = p_{k_1} \cdots p_{k_n} \mathbb{N}^*$

Donc :

$$\mu_s\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_{k_i}\right) = \mu_s(p_{k_1} \cdots p_{k_n} \mathbb{N}^*) = \frac{1}{p_{k_1}^{\ s} \cdots p_{k_n}^{\ s}} = \prod_{i=1}^{n} \mu_s(A_{k_i})$$

Ainsi, la famille $(A_k)_{k\geq 1}$ est une famille d'évènements indépendants.

Or, $\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k^c$ est l'ensemble des entiers naturels non nuls qui ne sont multiples d'aucun nombre premier, alors $\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k^c = \{1\}$.

De plus, la suite $\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k^c\right)_n$ est décroissante et $\bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcap_{k=1}^{n} A_k^c = \bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k^c = \{1\}$. Ainsi, par le théorème de continuité décroissante, $\lim_{n\to+\infty} \mu_s\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k^c\right) = \mu_s(\{1\}) = \frac{1}{\zeta(s)}$

Donc, par indépendance,

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} (1 - p_k^{-s}) = \prod_{k=1}^{+\infty} (1 - p_k^{-s})$$

Proposition Soit $(p_k)_{k\geq 1}$ la suite des nombres premiers.
Alors : $\sum_{k=1}^{+\infty} -\log\left(1 - \frac{1}{p_k}\right) = +\infty$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{p_k} = +\infty$.

La fonction $x \longmapsto -\log x$ est continue alors :

$$\log \zeta(s) = -\log \frac{1}{\zeta(s)} = \lim_{n\to+\infty} -\log \prod_{k=1}^{n} (1 - p_k^{-s}) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} -\log(1 - p_k^{-s}) = \sum_{k=1}^{+\infty} -\log(1 - p_k^{-s})$$

De plus, pour tout $s > 1$, et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\zeta(s) \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s}$.

Alors :

$$\lim_{s\to 1^+} \zeta(s) \geq \lim_{s\to 1^+} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \qquad \text{d'où} \quad \lim_{s\to 1^+} \zeta(s) = +\infty$$

Donc $\log \zeta(s) \xrightarrow[s\to 1^+]{} +\infty$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} -\log(1 - p_k^{-1}) \geq \sum_{k=1}^{+\infty} -\log(1 - p_k^{-s}) > A$.

Ainsi,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} -\log(1 - p_k^{-s}) = +\infty$$

Or, $-\log\left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \sim \frac{1}{p_k}$. Donc, par le théorème de comparaison de séries à termes positifs, la série de terme général $(1/p_k)_{k\geq 1}$ diverge.