Gourdon, Analyse page 264

Contre-exemple au théorème de Dirichlet dans le cas continu

Exemple Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ paire, 2π-périodique telle que : $\forall x \in [0, \pi]$, $f(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} \sin\left[(2^{p^3}+1)\frac{x}{2}\right]$

Pour tous $k, n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$a_{n,k} = \int_0^{\pi} \cos(nt) \sin\left(\frac{2k+1}{2}t\right) dt \quad \text{et} \quad s_{n,k} = \sum_{i=0}^{n} a_{i,k}$$

On a alors :

- f est définie et continue sur $\mathbb{R}$
- la série de Fourier de f diverge en 0

Montrons que f existe et est continue :

Pour tout $x \in [0, \pi]$,

$\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\left|\frac{1}{p^2} \sin\left[(2^{p^3}+1)\frac{x}{2}\right]\right| \leqslant \frac{1}{p^2}$, il s'agit du terme général d'une série convergente

On a donc convergence normale de la série sur $[0, \pi]$, donc f est bien définie et continue sur $[0, \pi]$.
En prolongeant par parité, f est continue sur $[-\pi, \pi]$.
Or $f(\pi) = f(-\pi)$ donc f est continue sur $\mathbb{R}$ par 2π-périodicité.

Montrons que $s_{q,k} \geqslant 0$ pour tous q, k et $s_{k,k} \geqslant \frac{\log k}{2}$

Soient $n, k \in \mathbb{N}$,

$$a_{n,k} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \left[\sin\left(\frac{2k+1}{2} + n\right)t + \sin\left(\frac{2k+1}{2} - n\right)t\right] dt$$

$$\phantom{a_{n,k}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+n+1/2} + \frac{1}{k-n+1/2}\right)$$

$$\phantom{a_{n,k}} = \frac{k+1/2}{(k+1/2)^2 - n^2}$$

Par conséquent, pour $n \leqslant k$ $a_{n,k} \geqslant 0$ donc pour $q \leqslant k$, $s_{q,k} \geqslant 0$.

Pour le cas $q > k$, on remarque que les $a_{n,k}$ sont à un facteur $\frac{2}{\pi}$ près les coefficients de Fourier $a_n(g_k)$ de la fonction paire $g_k : t \in [-\pi, \pi] \longmapsto |\sin(k+\frac{1}{2})t|$.
La fonction g_k est continue et C^1 par morceaux, donc d'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier converge simplement vers g_k sur $\mathbb{R}$.
En particulier, en 0,

$$\frac{a_{0,k}}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n,k} = \frac{\pi}{2} g_k(0) = 0 \quad \text{donc} \quad s_{q,k} \xrightarrow[q \to +\infty]{} \frac{a_{0,k}}{2}$$

Or $(s_{q,k})_q$ est décroissante à partir de l'indice $q = k$ donc : $\forall q \geqslant k$, $s_{q,k} \geqslant \frac{a_{0,k}}{2} \geqslant 0$. car $a_{n,k} < 0$ pour $q > k$

De plus,

$$s_{k,k} = \sum_{n=0}^{k} a_{n,k} \geqslant \sum_{n=1}^{k} \frac{k+1/2}{(k+1/2)^2 - n^2} \geqslant \underbrace{\sum_{n=1}^{k} \int_{n-1}^{n} \frac{k+1/2}{(k+1/2)^2 - t^2} dt}_{\text{par croissance de la fonction } t \longmapsto \frac{k+1/2}{(k+\frac{1}{2})^2 - t^2}} = \int_0^k \frac{k+\frac{1}{2}}{(k+1/2)^2 - t^2} dt = \frac{1}{2}\log(4k+3)$$

D'où :

$$s_{k,k} > \frac{\log k}{2}$$

Montrons que la série de Fourier diverge en 0

Comme f est paire, les coefficients de Fourier $b_n(f)$ sont nuls.

On a :

$$a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(nt) \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} \sin\left[(2^{p^3}+1)\frac{t}{2}\right] dt = \underbrace{\frac{2}{\pi} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} \int_0^{\pi} \sin\left[(2^{p^3}+1)\frac{t}{2}\right] \cos(nt)\,dt}_{\text{interversion licite car cv normale}}$$

Donc :

$$a_n(f) = \frac{2}{\pi} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} a_{n, 2^{p^3}-1} \quad \text{et} \quad \underbrace{S_n(f) = \frac{\pi}{2}\sum_{k=0}^{n} a_k(f)}_{\text{série de Fourier en } 0} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} s_{n, 2^{p^3}-1}$$

Or $s_{q,k} \geqslant 0$ et $s_{k,k} > \frac{\log k}{2}$ donc :

$$S_{2^{p^3}-1} \geqslant \frac{1}{p^2} s_{2^{p^3}-1, 2^{p^3}-1} \geqslant \frac{1}{2p^2} \log(2^{p^3-1}) = \frac{p^3-1}{2p^2} \log 2 \xrightarrow[p \to +\infty]{} +\infty$$