Rudin, Analyse réelle et cplx, page 94

Rombaldi, Exercices pour agrég, page 130

Théorème de Bohr - Mollerup

Théorème Une fonction f qui satisfait les trois conditions suivantes, coïncide sur son domaine de définition avec la fonction Γ :

(i) le domaine de définition de f contient $]0,+\infty[$ et f est logarithmiquement convexe sur E

(ii) $f(x+1) = xf(x)$

(iii) $f(1) = 1$

• Vérifions qu'une telle fonction existe

Pour tout $x > 0$,

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

On a alors :

- pour $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ et $\lambda \in]0,1[$,

$$\Gamma(\lambda x + (1-\lambda) y) = \int_0^{+\infty} t^{\lambda x + (1-\lambda)y - 1} e^{-t}\, dt$$

$$= \int_0^{+\infty} t^{\lambda(x-1)}\, t^{(1-\lambda)(y-1)}\, e^{-t}\, dt$$

$$= \int_0^{+\infty} (t^{x-1} e^{-t})^{\lambda} (t^{y-1} e^{-t})^{1-\lambda}\, dt$$

$$\leqslant \left(\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt\right)^{\lambda} \left(\int_0^{+\infty} t^{y-1} e^{-t}\, dt\right)^{1-\lambda} \quad \text{par Hölder}$$

$$= \Gamma(x)^{\lambda}\, \Gamma(y)^{1-\lambda}$$

Donc la fonction Γ est log-convexe car $\log \Gamma(\lambda x + (1-\lambda) y) \leqslant \log(\Gamma(x)^{\lambda}\Gamma(y)^{1-\lambda}) = \lambda \log \Gamma(x) + (1-\lambda)\log\Gamma(y)$

- $\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\, dt = [-t^x e^{-t}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} x t^{x-1} e^{-t}\, dt = x\Gamma(x)$

- $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt = 1$

• Montrons l'unicité d'une telle fonction

Soit f une fonction vérifiant ces conditions.

Pour tout $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$, en appliquant successivement (ii) : $f(x+n) = \prod_{k=0}^{n-1} (x+k) f(x)$.

Par conséquent, les valeurs de f sur $]1,+\infty[$ sont déterminées par celles de f sur $]0,1]$. On obtient en particulier, $f(n) = (n-1)!$.

Pour démontrer ce théorème, il est alors suffisant de vérifier qu'elles coïncident sur $]0,1]$.

On exprime la log-convexité en écrivant la croissance du quotient des différences calculé en les points $(-1+n)$ et n, $(x+n)$ et n, et, $(1+n)$ et n :

$$\frac{\log f(-1+n) - \log f(n)}{(-1+n) - n} \leqslant \frac{\log f(x+n) - \log f(n)}{(x+n) - n} \leqslant \frac{\log f(1+n) - \log f(n)}{(1+n) - n}$$

i.e.

$$\log(n-1) \leqslant \frac{\log f(x+n) - \log[(n-1)!]}{x} \leqslant \log n,$$ c'est-à-dire : $\log[(n-1)^x (n-1)!] \leqslant \log f(x+n) \leqslant \log[n^x (n-1)!]$.

On obtient alors par (stricte) croissance du log, $(n-1)^x (n-1)! \leqslant f(x+n) \leqslant n^x (n-1)!$.

Donc :

$$\frac{(n-1)^x (n-1)!}{(x+n-1)\cdots(x+1)x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{n^x (n-1)!}{(x+n-1)\cdots(x+1)x} = \frac{n^x\, n!}{(x+n)\cdots(x+1)x} \cdot \frac{x+n}{n}$$

Ceci étant vrai pour tout $n \geqslant 1$, $\frac{n^x\, n!}{(x+n)\cdots(x+1)x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{n^x\, n!}{(x+n)\cdots(x+1)x} \cdot \frac{x+n}{n}$, donc $\frac{n f(x)}{x+n} \leqslant \frac{n^x\, n!}{(x+n)\cdots x} \leqslant f(x)$

Finalement, $f(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x\, n!}{(x+n)\cdots x}$ pour tout $x \in]0,1]$. Ainsi, cela étant particulièrement vrai pour Γ, on obtient $f = \Gamma$ sur $]0,1]$ donc sur $]0,+\infty[$.

Application [Formule de Legendre] Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\boxed{\text{Alors : } \Gamma(x) = \frac{2^{x-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{x}{2}\right) \Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right).}$$

Considérons $\mathcal{L} : x \in \,]0, +\infty[\, \longmapsto \dfrac{2^{x-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\dfrac{x}{2}\right) \Gamma\left(\dfrac{x+1}{2}\right)$.

On a alors :

- $\mathcal{L}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$

- les fonctions $x \longmapsto 2^{x-1}$, $x \longmapsto \Gamma\left(\frac{x}{2}\right)$ et $x \longmapsto \Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)$ sont log-convexes, alors par produit $\mathcal{L}$ est log-convexe sur $\mathbb{R}_+^*$

- pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\mathcal{L}(x+1) = \frac{2^x}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{x+2}{2}\right) = \frac{2^x}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) \frac{x}{2} \Gamma\left(\frac{x}{2}\right) = x\,\mathcal{L}(x)$$

- $$\mathcal{L}(1) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma(1) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} t^{-1/2} e^{-t}\, dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} u^{-1} e^{-u^2}\, 2u\, du = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = 1$$

Donc, par le théorème de Bohr - Mollerup, $\mathcal{L} = \Gamma$.