# Théorème de prolongement des fonctions uniformément continues et app°

**Théorème** Soient $(X_1, d_1)$ espace métrique, $(X_2, d_2)$ espace métrique complet, $D$ une partie dense de $X_1$ et $f : D \longrightarrow X_2$ application uniformément continue.
Alors, $f$ se prolonge de manière unique en une application continue sur $X_1$. De plus, cette fonction est uniformément continue.

Dantzer

▷ Montrons l'existence :

Soit $x \in X_1 \setminus D$.

Par densité de $D$, il existe $(x_n)_n \subset D$ telle que $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$.

Soit $\varepsilon > 0$.

On a :

- par uniforme continuité de $f$ sur $D$, il existe $\alpha > 0$ tel que : $\forall x, y \in D,\ d_1(x,y) \leqslant \alpha \Rightarrow d_2(f(x), f(y)) \leqslant \varepsilon$
- $(x_n)_n$ est convergente donc de Cauchy donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall p, q \geqslant n_0,\ d_1(x_p, x_q) \leqslant \alpha$

On obtient donc :

$\forall p, q \geqslant n_0,\ d_2(f(x_p), f(x_q)) \leqslant \varepsilon$

Alors, la suite $(f(x_n))_n$ est de Cauchy dans $X_2$ complet donc est convergente.

Notons $\tilde{f}(x)$ cette limite.

Soit $x \in D_1$.

En considérant la suite constante égale à $x$, on a $\tilde{f}(x) = f(x)$.

Ainsi, $\tilde{f}$ prolonge $f$ sur $X_1$.

Soit $x, y \in X_1$ vérifiant $d(x,y) \leqslant \frac{\alpha}{2}$.

On considère $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ les suites convergeant vers $x$ et $y$ telles que $\tilde{f}(x) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n)$ et $\tilde{f}(y) = \lim_{n\to+\infty} f(y_n)$.

Par continuité de $d_1$, $d_1(x_n, y_n) \longrightarrow d_1(x,y)$.

Il existe alors $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant n_1,\ d_1(x_n, y_n) \leqslant \alpha$ d'où $d_2(f(x_n), f(y_n)) \leqslant \varepsilon$

Or par continuité de $d_2$, $d_2(f(x_n), f(y_n)) \longrightarrow d_2(\tilde{f}(x), \tilde{f}(y))$. Donc par passage à la limite :

$d_2(\tilde{f}(x), \tilde{f}(y)) \leqslant \varepsilon$ Donc $\tilde{f}$ est uniformément continue.

▷ Montrons l'unicité :

Supposons qu'il existe $f_1, f_2$ deux prolongements continus de $f$ sur $X_1$.

L'application $h = d_2(f_1, f_2)$ est continue comme composée et nulle sur $D$

Soit $x \in X_1$, il existe $(x_n)_n \subset D$ convergeant vers $x$; alors :

$h(x) = \lim_{n\to+\infty} h(x_n) = 0$. Donc $h = 0$ i.e. $f_1 = f_2$.

**Proposition** Soient $E$ un espace vectoriel normé, $F$ un espace de Banach, $D$ une partie dense de $E$ et $L \in \mathcal{L}(D, F)$. Alors $L$ se prolonge de manière unique en une application continue, qui est de plus linéaire et de norme $\|L\|$.

Les seuls éléments à montrer sont la linéarité et l'égalité des normes.

Soit $\tilde{L}$ le prolongement de $L$ sur $E$.

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $x, y \in E$,

il existe $(x_n)_n \subset D$ et $(y_n)_n \subset D$ telles que $x_n \longrightarrow x$, $y_n \longrightarrow y$

On a :

- par linéarité de $L$, $\lambda \tilde{L}(x) + \mu \tilde{L}(y) = \lambda \lim_{n\to+\infty} (x_n) + \mu \lim_{n\to+\infty} L(y_n) = \lim_{n\to+\infty} L(\lambda x_n + \mu y_n)$
- $\lim_{n\to+\infty} L(\lambda x_n + \mu y_n) = \tilde{L}(\lambda x + \mu y)$ car $\lambda x_n + \mu y_n \longrightarrow \lambda x + \mu y$

Donc, par unicité des limites, $\lambda \tilde{L}(x) + \mu \tilde{L}(y) = \tilde{L}(\lambda x + \mu y)$. D'où la linéarité.

D'autre part,

- la sphère unité de $D$ étant incluse dans celle de $E$, $\|L\| \leqslant \|\tilde{L}\|$
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|L(x_n)\| \leqslant \|L\| \|x_n\|$ donc par passage à la limite, $\|\tilde{L}(x)\| \leqslant \|L\| \|x\|$ i.e. $\|\tilde{L}\| \leqslant \|L\|$

Donc, $\|L\| = \|\tilde{L}\|$.