VH
28/11/14

Table de caractères de $\mathfrak{S}_4$ et groupe d'isométries du tétraèdre.

101, (104), 105, 107, 109, 161

Table de caractères de $\mathfrak{S}_4$

		1	6	3	8	6
		C_1	C_2	C_{2-2}	C_3	C_4
ligne 1	$\mathbb{1}$	1	1	1	1	1
ligne 2	ε	1	-1	1	1	-1
3	χ_v	3	1	-1	0	-1
4	$\varepsilon\chi_v$	3	-1	-1	0	1
5	χ_5	a=2	0	b=2	c=-1	0

← nombre d'élts dans la classe

C_1 : identité
C_2 : transpositions
C_{2-2} : doubles transpositions
C_3 : 3-cycles
C_4 : 4-cycles

à la fin : remplissage de la 4ème ligne

5ème ligne : $24 = 1^2+1^2+3^2+3^2+a^2$ donc $a=2$.

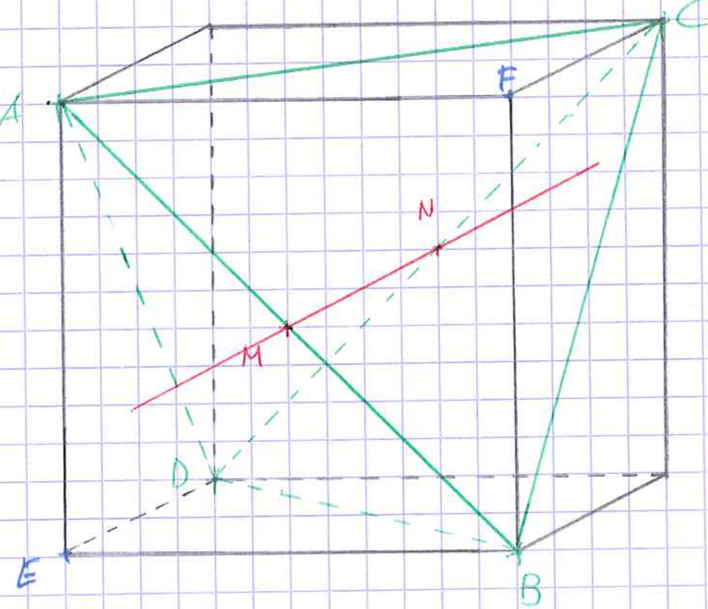
$0 = 24\langle \chi_5, \mathbb{1}\rangle = 2 + 3b + 8c$

$0 = 24\langle \chi_5, \chi_v\rangle = 6 - 3b$

donc $b=2$, $c=-1$.

On remplit immédiatement les lignes 1 et 2.

Soit Isom (T) le groupe des isométries du tétraèdre régulier.



Isom (T) induit une permutation des sommets $\{A, B, C, D\}$.

On a donc un morphisme de groupes

$\varphi : \mathrm{Isom}(T) \longrightarrow \mathfrak{S}_4$.

- φ est injectif : si $\varphi(g) = id_{\mathfrak{S}_4}$, g préserve les 4 sommets, donc une base affine donc g est l'identité.

- φ est surjectif : il suffit de montrer que $\mathrm{Im}(\varphi)$ contient les transpositions, car elles engendrent $\mathfrak{S}_4$.

Soit $\tau = (1\,2) = (A\,B)$. Soit s la symétrie orthogonale (i.e réflexion) par rapport au plan (CDEF). $\varphi(s) = (AB)$. On fait de même pour les autres transpositions.

Bilan : Isom (T) est isomorphe à $\mathfrak{S}_4$.

Or $Isom(T)$ a une représentation linéaire naturelle V :

$$\rho_V : \mathfrak{S}_4 \longrightarrow GL_3(\mathbb{R}) \to GL_3(\mathbb{C})$$

qui à tout $\sigma \in \mathfrak{S}_4 \simeq Isom(T)$ renvoie la matrice de la partie linéaire de l'isométrie dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Soit χ_V le caractère de V. $\chi_V(\sigma) = Tr(\rho_V(\sigma))$.

La trace ne dépend pas du choix de la base dans laquelle on représente l'isométrie : on choisira donc pour chaque classe de conjugaison une base dans laquelle il est facile de calculer la trace.

Calcul de χ_V :

- sur C_1 : $\chi_V(id) = 3$.
- sur C_2 : $\rho_V((A\ B))$ est la matrice de s.

Dans une certaine base, elle s'écrit $\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix}$

donc $\chi_V((A\ B)) = 1$.

- sur C_{2-2} : $(A\ B)(C\ D)$ est la symétrie orthogonale par rapport (le retournement) à la droite (MN), où M est le milieu de $[A\ B]$ et N celui de $[C\ D]$.

Donc $\rho_V((A\ B)(C\ D))$ est semblable à $\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & -1 & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix}$

$$\chi_V((A\ B)(C\ D)) = -1.$$

- sur C_3 : $(B\ C\ D)$ est une rotation autour de l'axe (AG), où G est le centre de gravité du triangle équilatéral BCD, et d'angle $\frac{2\pi}{3}$. Donc $\rho_V((B\ C\ D)) \simeq \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, $\alpha = \frac{2\pi}{3}$

$$\chi_V(B\ C\ D) = 1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 0.$$

- sur C_4 : $(A\ B\ C\ D)$: Soit O le milieu du cube.

$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = \vec{0}.$$

Dans le repère $(\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC})$, $\rho_V((A\ B\ C\ D))$ s'écrit donc $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Donc $\chi_V((A\ B\ C\ D)) = -1$.

- χ_V est irréductible : $24\|\chi_V\|^2 = 1\cdot 3^2 + 6\cdot 1^2 + 3\cdot(-1)^2 + 8\cdot 0 + 6\cdot(-1)^2 = 24$

donc $\|\chi_V\|^2 = 1$. On remplit la 3ème ligne.