Cotrigonalisation

Théorème Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel fini.
On considère une famille $(f_i)_{i\in I}$ d'endomorphismes de E commutant deux à deux, et trigonalisables. On peut alors les trigonaliser dans une même base.

- Montrons que les $(f_i)_{i\in I}$ admettent un vecteur propre commun.

Par récurrence sur n :

- si $n = 1$, c'est évident
- supposons que ce soit vrai au rang $n-1$ et montrons-le au rang n.

Si les f_i sont des homothéties, c'est immédiat.
Sinon, il existe $i_0 \in I$ tel que f_{i_0} ne soit pas une homothétie. On note λ une valeur propre de f_{i_0} et E_λ l'espace propre associé.
Les f_i commutent avec f_{i_0} donc E_λ est stable par les f_i. En effet,

$$\forall i \in I,\ \forall x \in E_\lambda,\ f_{i_0}(f_i(x)) = f_i(f_{i_0}(x)) = f_i(\lambda x) = \lambda f_i(x) \quad \text{donc } f_i(x) \in E_\lambda$$

Par hypothèse de récurrence,
il existe un vecteur propre commun à tous les $f_i|_{E_\lambda}$.
En particulier, il s'agit d'un vecteur propre commun à tous les f_i.

- Montrons que $(f_i)_{i\in I}$ est cotrigonalisable.

Par récurrence sur n :

- si $n = 1$, c'est immédiat

- supposons que ce soit vrai jusqu'au rang $n-1$ et montrons-le au rang n.

Les applications ${}^tf_i$ commutent entre elles deux à deux et sont trigonalisables car $\chi_{f_i} = \chi_{{}^tf_i}$.
On peut donc appliquer le résultat précédent à la famille $({}^tf_i)_i$:
il existe $x \in E^*$ un vecteur propre commun à tous les ${}^tf_i$
On obtient :

$$\forall i \in I,\ \forall y \in (\mathbb{K}x)^\circ,\quad x(f_i(y)) = {}^tf_i(x)(y) = \lambda_i\, x(y) = 0$$

Donc $H = (\mathbb{K}x)^\circ$ est un hyperplan stable par tous les f_i.
D'après l'hypothèse de récurrence,
il existe une base $\mathcal{B}'$ de H qui cotrigonalise tous les $f_i|_H$.
On complète $\mathcal{B}'$ en une base $\mathcal{B} = \mathcal{B}' \cup \{e\}$ de E.

On a alors :

$$\forall i \in I,\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f_i) = \begin{pmatrix} \times & \cdots & \times & \times \\ & \ddots & \vdots & \vdots \\ (0) & & \times & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \times \end{pmatrix}$$

Donc la base $\mathcal{B}$ trigonalise tous les f_i.