Rombaldi, pages 184 & 186

Lemme de Schur et théorème de Maschke

Lemme de Schur Soient E, F deux $\mathbb{C}$-espaces vectoriels et (ρ, E), (σ, F) deux représentations irréductibles de G. Alors :

(i) si E et F ne sont pas isomorphes alors $\mathcal{L}_G(E,F) = \{0\}$

(ii) si E et F sont isomorphes, de dimension finie, alors $\mathcal{L}_G(E,F)$ est de dimension 1 sur $\mathbb{C}$ donc constitué des homothéties

· démonstration du (i)

Soit $u \in \mathcal{L}_G(E,F)$, $u \neq 0$.

On a (ρ, E) irréductible et :

$$\forall g \in G, \forall x \in \operatorname{Ker} u, \quad u(\rho(g)(x)) = u \circ \rho(g)(x) = \sigma(g) \circ u(x) = \sigma(g)(0) = 0$$

donc $\operatorname{Ker} u$ est G-invariant.

Alors, comme $u \neq 0$, $\operatorname{Ker} u = \{0\}$ i.e. u est injective. — donc $\operatorname{Ker} u \neq E$

D'autre part, (σ, F) est irréductible et :

$$\forall g \in G, \quad \forall y = u(x) \in \operatorname{Im} u, \quad \sigma(g)(y) = \sigma(g) \circ u(x) = u \circ \rho(g)(x) = u(\rho(g)(x)) \in \operatorname{Im} u$$

donc $\operatorname{Im} u$ est G-invariant.

Or, $u \neq 0$ donc $\operatorname{Im} u = F$, i.e. u est surjective. — i.e. $\operatorname{Im} u \neq \{0\}$

Alors u est un isomorphisme de E dans F : absurde ! Donc $\mathcal{L}_G(E,F) = \{0\}$. — par hypothèse

· démonstration du (ii)

Le corps $\mathbb{C}$ est algébriquement clos et $E \simeq F$ de dimension finie.

Donc, tout $u \in \mathcal{L}_G(E,F)$ identifié à un élément de $\mathcal{L}(E)$ admet une valeur propre λ.

On a :

$$u - \lambda \, id_E \in \mathcal{L}_G(E,F) \text{ donc } E_\lambda = \ker(u - \lambda \, id_E) \text{ est } G\text{-invariant}$$

— même argument qu'en (i)

Ainsi, comme $E_\lambda \neq \{0\}$, $E_\lambda = E$. Donc, u est une homothétie.

Donc, $\mathcal{L}_G(E,F) \simeq \mathbb{K}$.

Théorème de Maschke Soient (ρ, E) une représentation de G dans E et F un sous-espace invariant de E. Il existe alors H un sous-espace G-invariant de E tel que $E = F \oplus H$.

En tant qu'espaces vectoriels, il existe F' un sous-espace de E tel que $E = F \oplus F'$. — pas nécessairement G-invariant

On note p le projecteur associé d'image F, de noyau F'.

Posons :

$$\hat{p} = \frac{1}{\# G} \sum_{g \in G} \rho(g) \circ p \circ \rho(g^{-1}) \in \mathcal{L}(E)$$

Pour tous $x \in E$, $g \in G$,

$$p \circ \rho(g^{-1})(x) \in F \text{ donc } \rho(g) \circ p \circ \rho(g^{-1})(x) \in F \text{ car } (\rho, F) \text{ est invariant}$$

d'où $\operatorname{Im} \hat{p} \subset F$.

De plus, pour tout $x \in F$,

$$\rho(g^{-1})(x) \in F \text{ donc } p(\rho(g^{-1})(x)) = \rho(g^{-1})(x) \text{ et } \hat{p}(x) = \frac{1}{\# G} \sum_{g \in G} \rho(g) \circ \rho(g^{-1})(x) = x$$

Ainsi,

$\hat{p}$ est un projecteur d'image F

On a ainsi en posant $H = \ker \hat{p}$, $E = F \oplus H$.

De plus, pour tous $x \in H$, $g_0 \in G$,

$$\hat{p} \circ \rho(g_0) = \frac{1}{\# G} \sum_{g} \rho(g) \circ p \circ \rho((g_0^{-1} g)^{-1}) = \frac{1}{\# G} \sum_{h \in G} \rho(g_0 h) \circ p \circ \rho(h^{-1}) = \rho(g_0) \circ \hat{p}$$

Alors $H = \operatorname{Ker} \hat{p}$ est G-invariant.