VM
5/01/15

Représentations et sous-groupes distingués

Peyré

103, 107, 109

Soit G un groupe fini, d'élément neutre e.

Soit $\rho_1, \dots, \rho_n$ un ensemble de représentants des classes d'isomorphies de représentations irréductibles. Soit $\chi_1, \dots, \chi_n$ les caractères irréductibles associés.

On note $K_{\chi_i} = \{ g \in G \mid \chi_i(g) = \chi_i(e) \}$.

Théorème : Les sous-groupes distingués de G sont exactement

les $\bigcap_{i \in I} K_{\chi_i}$ où $I \subset \{1, \dots, n\}$.

dém : Lemme : Soit ρ une représentation de G, χ son caractère.

Alors $\forall g \in G$, $|\chi(g)| \leq \chi(e)$ et

K_χ est un sous-groupe distingué de G.

dém : En effet, soit $n = |G|$. $\forall g \in G$, $g^n = e$ donc $\rho(g)^n = 1$.

Ainsi $X^n - 1$ est un polynôme annulateur de $\rho(g)$, donc $\rho(g)$ est diagonalisable et ses vp sont des racines n-ième de l'unité $\omega_1, \dots, \omega_d$ (comptées avec leur multiplicité).

Donc $\chi(g) = \sum_{i=1}^{d} \omega_d$ d'où $|\chi(g)| \leq \sum_{i=1}^{d} |\omega_d| = d = \chi(e)$

De plus, si $\chi(g) = \chi(e)$, alors on a égalité dans l'inégalité triangulaire. Les ω_i sont positivement liés, donc tous égaux, et donc $\forall i$, $\omega_i = 1$ donc $\rho(g) = Id$: $g \in \operatorname{Ker} \rho$.

Donc $K_\chi = \operatorname{Ker} \rho$ est un sous-groupe distingué de G.

Réciproquement :

Soit N un sous-groupe distingué de G.

Soit ρ_u une représentation régulière de G/N, i.e

U est un ev de dimension $|G/N|$,

de base $\{e_{\bar g}\}_{\bar g \in G/N}$, et $\rho_u(g)(e_h) = e_{gh}$ $\forall g, h \in G/N$

Rq : Cette repr. est fidèle.

Soit $\tilde{\rho}_u : G \to Bij(U)$ défini par $\tilde{\rho}_u = \rho_u \circ \Pi$, où $\Pi : G \to G/N$ est la projection canonique. $\tilde{\rho}_u$ est une représentation de G, de noyau $Ker(\tilde{\rho}_u) = N$ car ρ_u est injective.

Or $Ker(\tilde{\rho}_u) = K_\chi$ où χ est le caractère de $\tilde{\rho}_u$.

En décomposant $\tilde{\rho}_u$ en fonction des représentations irréductibles de G, on obtient $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n$ tq

$$\chi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_i .$$

D'après le lemme,

$$\forall g \in G, \ |\chi(g)| \leq \sum_{i=1}^{n} a_i |\chi_i(g)| \leq \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_i(e) = \chi(e).$$

Donc $g \in K_\chi = N$ ssi $\chi(g) = \chi(e)$

ssi $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \ a_i \chi_i(g) = a_i \chi_i(e)$

ssi $\forall i$ tq $a_i > 0$, $\chi_i(g) = \chi_i(e)$

donc $g \in K_{\chi_i}$.

Ainsi $N = \bigcap_{\{i | a_i > 0\}} K_{\chi_i}$.

$\square$

Corollaire : G est simple ssi $\forall \chi$ caractère irréductible non trivial, $\forall g \in G \setminus \{e\}, \chi(g) \neq \chi(e)$.

dém : S'il existe χ non trivial, $g \in G \setminus \{e\}$ tel que $\chi(g) \neq \chi(e)$, alors K_χ est un sous-groupe distingué strict de G contenant $g \neq e$, donc G n'est pas simple.

Réciproquement, si G est non simple, il existe $g \neq e$ dans un certain sous-groupe distingué N strict de G.

Alors $N = \bigcap_{i \in I} K_{\chi_i}$, où I est non vide, donc $g \in K_{\chi_i}$ pour un certain i : $\chi_i(g) = \chi_i(e)$.

$\square$