VM
17/04/15

Topologie des classes de similitude

153, 155, 157

Réf : FGN, alg 1

Théorème : Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$.

i) A est nilpotente ssi 0 appartient à l'adhérence de la classe de similitude de A.

ii) A est diagonalisable ssi la classe de similitude de A est fermée.

dém : Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$.

lemme : Soit $\varepsilon > 0$. Dans la classe de similitude de A, il existe $T \in M_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure telle que tous les coefficients strictement surdiagonaux (i.e t_{ij} pour $i<j$) sont de module inférieur à ε.

dém (lemme) : $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, donc on peut trigonaliser A : il existe T triangulaire supérieure, $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tels que $T = P^{-1}AP$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ tel que $T = Mat_{\mathcal{B}}(f)$.

raccourcir

Soit $\delta > 0$. Soit $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ la nouvelle base définie par

$$e'_i = \delta^{i-1} e_i$$

$$f(e'_j) = f(\delta^{j-1} e_j) = \delta^{j-1} \sum_{i \leq j} t_{ij} e_i = \sum_{i \leq j} \delta^{j-i} t_{ij} e'_i$$

On choisit δ de sorte que $\forall i<j$, $\delta^{j-i} |t_{ij}| < \varepsilon$.

$\tilde{T} = Mat_{\mathcal{B}'}(f)$ est semblable à A et convient.

□

i) Supposons A nilpotente. Soit $\|\cdot\|$ la norme sur $M_n(\mathbb{C})$ définie par $\|M\| = \sup_{i,j} |m_{ij}|$.

Soit $\varepsilon > 0$. D'après le lemme, il existe T triangulaire supérieure semblable à A telle que $\forall i<j$, $|t_{ij}| < \varepsilon$.

Les coefficients diagonaux de T sont les valeurs propres de A ; comme A est nilpotente, la seule valeur propre est 0.

Ainsi, les coefficients diagonaux de T sont nuls et

$\|T\| < \varepsilon$.

Donc 0 appartient à l'adhérence pour la norme $\|.\|$ de la classe de similitude de A. Par équivalence des normes sur $M_n(\mathbb{C})$, cette propriété ne dépend pas du choix de la norme.

Réciproquement, soit (A_p) une suite convergent vers 0, telle que pour tout p, A_p est semblable à A. Ainsi, le polynôme caractéristique χ_A de A est égal $\forall p$ à χ_{A_p}. Par continuité du polynôme caractéristique, $\chi_{A_p} \xrightarrow[p \to +\infty]{} \chi_0 = X^n$ donc $\chi_A = X^n$: d'après le théorème de Cayley-Hamilton, χ_A est annulateur de A : $A^n = 0$, A est nilpotente.

Supposons A diagonalisable. Soit (A_p) une suite convergent vers B telle que $\forall p$, A_p est semblable à A.

Le polynôme minimal π_A de A est scindé à racines simples.

Par similitude, $\pi_A(A_p) = 0$ $\forall p$. On fait tendre $p \to +\infty$, donc $\pi_A(B) = 0$: B admet un polynôme annulateur scindé à racines simples, donc B est diagonalisable.

Comme $\chi_A = \chi_{A_p} \to \chi_B$ on a $\chi_A = \chi_B$ donc A et B sont semblables. Ainsi, la classe de similitude de A est fermée.

Réciproquement, supposons la classe de similitude de A fermée.

Pour tout $p \geq 1$, il existe T_p triangulaire supérieure semblable à A telle que $|t_{ij}| < \frac{1}{p}$ pour tout $i<j$

Comme les coefficients diagonaux de T_p sont les valeurs propres de A, la suite (T_p) est bornée. On peut en extraire une sous-suite qui converge : $T_{\varphi(p)} \to T$. Par hypothèse de fermeture, T est semblable à A. De plus, T est diagonale. Donc A est diagonalisable.