VM
11/05/15
1

$\mathbb{C}[X,Y]/(X^2+Y^2-1)$ est principal

122, 142

Réf. Ortiz

Théorème : $\mathbb{C}[X,Y]/(X^2+Y^2-1)$ est principal.

Etape 1 : $\mathbb{C}[X,Y]/(X^2+Y^2-1) \simeq \mathbb{C}[U,V]/(UV-1)$

Etape 2 : $\mathbb{C}[U,V]/(UV-1) \simeq \mathbb{C}[U,\frac{1}{U}]$.

Etape 3 : $\mathbb{C}[U,\frac{1}{U}]$ est principal.

Dém : 1 $X^2+Y^2-1 = (X+iY)(X-iY)-1$.

$U = X+iY \qquad X = \frac{1}{2}(U+V)$

$V = X-iY \qquad Y = \frac{1}{2i}(U-V)$.

. On définit le morphisme de $\mathbb{C}$-algèbre $\varphi : \mathbb{C}[U,V] \to \mathbb{C}[X,Y]/(X^2+Y^2-1)$

par $\varphi : U \mapsto \overline{X+iY}$
$\qquad V \mapsto \overline{X-iY}$.

Comme $(UV-1) \subset \operatorname{Ker}\varphi$, on a par factorisation un morphisme d'anneau $\overline{\varphi} : \mathbb{C}[U,V]/(UV-1) \to \mathbb{C}[X,Y]/(X^2+Y^2-1)$.

. On définit ensuite le morphisme de $\mathbb{C}$-algèbre $\psi : \mathbb{C}[X,Y] \to \mathbb{C}[U,V]/(UV-1)$

par $\psi : X \mapsto \overline{\frac{1}{2}(U+V)}$; $Y \mapsto \overline{\frac{1}{2i}(U-V)}$.

Comme $(X^2+Y^2-1) \subset \operatorname{Ker}\psi$, on a $\overline{\psi} : \mathbb{C}[X,Y]/(X^2+Y^2-1) \to \mathbb{C}[U,V]/(UV-1)$

un morphisme d'anneau.

. $\overline{\varphi}\circ\overline{\psi}(\overline{X}) = \overline{\varphi}\left(\frac{1}{2}(\overline{U}+\overline{V})\right) = \frac{1}{2}(\overline{X+iY}) + \frac{1}{2}(\overline{X-iY}) = \overline{X}$

et $\overline{\varphi}\circ\overline{\psi}(\overline{Y}) = \overline{Y}$ et $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\overline{\varphi}\circ\overline{\psi}(\lambda) = \lambda$,

donc $\overline{\varphi}\circ\overline{\psi} = id_{\mathbb{C}[X,Y]/(X^2+Y^2-1)}$.

De même, $\overline{\psi}\circ\overline{\varphi} = id$.

Donc $\overline{\varphi}$ est un isomorphisme d'anneau.

② On définit le morphisme d'anneau

$$\Theta : \mathbb{C}[U,V] \to \mathbb{C}[U,\tfrac{1}{U}]$$
$$U \mapsto U$$
$$V \mapsto \frac{1}{U}$$

Il est clair que $(UV-1) \subset \operatorname{Ker}\Theta$.

Réciproquement, soit $P \in \operatorname{Ker}\Theta$. Regardons P comme élément de $\mathbb{C}(U)[V]$ et effectuons la division euclidienne de P par $UV-1$ dans cet anneau : $P(U,V) = (UV-1)\,Q(U,V) + R(U)$,

où $Q \in \mathbb{C}(U)[V]$ et $R \in \mathbb{C}(U)$.

Il existe $A \in \mathbb{C}[U]$ non nul tel que $AQ = Q_0 \in \mathbb{C}[U][V]$
et $AR = R_0 \in \mathbb{C}[U]$

donc $AP = (UV-1)\,Q_0 + R_0$.

Comme $P \in \operatorname{Ker}\Theta$, AP aussi, donc $\Theta(R_0) = 0$.
et $UV-1 \in \operatorname{Ker}\Theta$ et $(UV-1)Q_0$

Or comme $R_0 \in \mathbb{C}[U]$, $\Theta(R_0) = R_0$ donc $R_0 = 0$

et $AP \in (UV-1)$.

Montrons que $UV-1$ est premier dans $\mathbb{C}[U,V]$.

Comme $\mathbb{C}[U,V]$ est factoriel, il suffit de montrer que $UV-1$ est irréductible dans $\mathbb{C}[U,V]$. Or ceci est vrai car $UV-1$ est irréductible et primitif dans $\mathbb{C}(U)[V]$.

Comme $UV-1$ divise AP, ne divise pas A (car $A \in \mathbb{C}[U]$), et que $UV-1$ est premier, $UV-1$ divise P donc $P \in (UV-1)$.

On a donc $\operatorname{Ker}\Theta = (UV-1)$.

Comme Θ est surjectif, on a l'isomorphisme d'anneau ~~annoncé~~.

③ Soit $\lambda : \mathbb{C}[U] \to \mathbb{C}[U,\tfrac{1}{U}]$ l'injection canonique.

Soit I un idéal de $\mathbb{C}[U,\tfrac{1}{U}]$. λ étant un morphisme d'anneau, $J = \lambda^{-1}(I)$ est un idéal de $\mathbb{C}[U]$ principal :
$\exists\, P_0 \in \mathbb{C}[U]$ tel que $J = (P_0)$.

Alors $I = (\lambda(P_0))$. L'inclusion $\supset$ est claire, et si $Q \in I$,

il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $U^k Q \in (\operatorname{Im} \lambda) \cap I$,

donc il existe $S \in \mathbb{C}[U]$ tel que $U^k Q = \lambda(S P_0)$.

$$Q = \frac{\lambda(S)}{U^k} \lambda(P_0) \quad \text{donc} \quad Q \in (\lambda(P_0)).$$

Conclusion : $\mathbb{C}[U, \frac{1}{U}]$ est principal donc $\mathbb{C}[X,Y]/(X^2+Y^2-1)$ l'est aussi.