Théorème de Cauchy-Lipschitz local: (6)

Th: Soient U un ouvert de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$; $f: U \to \mathbb{R}^n$ continue et localement lipschitzienne en la seconde variable. et $(t_0, y_0) \in U$. Alors le problème:

$$(E)\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

admets une unique solution définie au voisinage de t_0.

Bernis - 40 développements, Analyse pour l'agrégation.
p. 66 - 73

dem: • Comme f est localement lipschitzienne, $\exists\, C_0 = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times \underbrace{\overline{B}(y_0, r_0)}_{B}$, $k \geq 0$ tel que: $\forall (t, y_1), (t, y_2) \in C_0$, $\| f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq k \|y_1 - y_2\|$.

• f est continue sur C_0 compact donc elle y est majorée et on note $M = \sup_{(t,y)\in C_0} \|f(t,y)\|$

On note $T = \min\left(T_0, \frac{r}{M}\right)$ et $I = [t_0 - T, t_0 + T]$.

• I est compact, $(B, \|\cdot\|)$ est fermé dans le complet $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ donc $(B, \|\cdot\|)$ est complet. Ainsi $(E = C^0(I, B), \|\cdot\|_\infty)$ est complet.

• Si $\varphi \in E$, $t \mapsto y_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s))\, ds$ est bien définie.

$$\forall t \in I, \left\| \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s))\, ds \right\| \leq M |t - t_0| \leq MT \leq r$$

Ainsi $\Phi: E \to E$
$$\varphi \mapsto \left(\begin{array}{l} I \to B \\ t \mapsto y_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s))\, ds \end{array}\right)$$ est bien définie.

• On remarque que y est solution de $(E) \iff y$ est un point fixe de Φ.

$\boxed{\Rightarrow}$ y est C^1, $y(t) = \int_{t_0}^t y'(s)\, ds + y(t_0) \underset{y \text{ solution de } (E)}{=} \int_{t_0}^t f(s, y(s))\, ds + y_0$.

$\boxed{\Leftarrow}$ y est continue donc $t \mapsto f(t, y(t))$ est continue et $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(t_0) = y_0$.

• Montrons par récurrence: $\forall p \in \mathbb{N}, \forall t \in I, \forall y, z \in E$:
$$\|y_p(t) - z_p(t)\| \leq \frac{k^p}{p!} |t - t_0|^p \|y - z\|_\infty \quad [\text{on a noté: } y_p = \Phi^p(y)].$$
L'initialisation est triviale.

Hérédité: $\|y_{p+1}(t) - z_{p+1}(t)\| = \left\| \int_{t_0}^t (f(s, y_p(s)) - f(s, z_p(s)))\, ds \right\|$

$$f\ k\text{-lip} \rightsquigarrow \leq \left| \int_{t_0}^t k \|y_p(s) - z_p(s)\|\, ds \right|$$
$$\text{H-R} \rightsquigarrow \leq \left| \int_{t_0}^t \frac{k^{p+1}}{p!} \|y - z\|_\infty |s - t_0|^p\, ds \right|$$
$$\leq k^{p+1} \|y - z\|_\infty \frac{|t - t_0|^{p+1}}{(p+1)!}.$$

- On a donc $\|y_p - z_p\|_\infty \leqslant \frac{k^p}{p!} \|y - z\|_\infty |t - t_0|^p$

$$\leqslant \frac{k^p}{p!} T^p \|y - z\|_\infty .$$

Or $\lim\limits_{k \to +\infty} \frac{k^p}{p!} T^p = 0$ donc $\exists N \in \mathbb{N}$ tq $\frac{k^N}{N!} T^N < 1$, donc Φ^N est contractante.

Par théorème du point fixe $\exists ! \, y \in E$ tq $\Phi^N(y) = y$.

- Comme $\Phi^N(\Phi(y)) = \Phi(y)$, $\Phi(y)$ est également un point fixe de Φ^N, par unicité du point fixe, il vient $\Phi(y) = y$. ///

<u>Recasage:</u> 205 - 220 - 226

<u>Points délicats:</u>

Question : 6

1. Mq que $\forall \varphi \in E$, $\Phi(\varphi)$ est continue :

$\varphi \in E$ donc $\forall s \in [t_0 - T, t_0 + T]$ $\varphi(s) \in B(y_0, r_0)$ donc $\|f(s,\varphi(s))\| \leq M$

Soit $t_1 \in I$, $\forall t \in I$:

$$\| \Phi(\varphi)(t_1) - \Phi(\varphi)(t) \| = \| \int_t^{t_1} f(s,\varphi(s))\, ds \| \leq M|t_1 - t| \underset{t \to t_1}{\longrightarrow} 0$$ (d'où la continuité en t_1)

2. Pq $\| \int_a^b f(t)\,dt \| \leq \int_a^b \|f(t)\|\,dt$?

. Première étape, cette inégalité pour les fonctions en escaliers. Si g est une fc° en escalier, on note g_i sa valeur prise sur $]a_{i-1}, a_i[$ où $\bigcup_{i=1}^{n} [a_{i-1} - a_i]$ est une subdivision de $[a,b]$ comme par définition $\int_a^b g(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1}) g_i$, on a :

$$\| \int_a^b g(x)\,dx \| = \| \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1}) g_i \| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i - a_{i-1}| \, \|g_i\| = \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1}) \|g_i\| = \int_a^b \|g(t)\|\,dt$$

. Deuxième étape : Soit f continue par morceaux. On sait (ques° -) qu'il existe une suite de fc° en escalier (f_n) qui converge uniformément vers f. Donc (soit par CVD soit en montrant directement par CVU) :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt$$ la norme étant continue, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \| \int_a^b f_n(t)\,dt \| = \| \int_a^b f(t)\,dt \|. \quad (=) \ (*_1)$$

De plus, $\forall t \in [a,b], \forall n \in \mathbb{N}$, $| \|f_n(t)\| - \|f(t)\| | \leq \|f_n(t) - f(t)\| \leq \|f_n - f\|_\infty$.

donc $(\|f_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ CVU vers $\|f\|$ donc (soit par CVD, soit en montrant directement par CVU)

$$\lim \int_a^b \|f_n(t)\|\,dt = \int_a^b \|f(t)\|\,dt \quad (=) \ (*_2)$$

Par la 1ère étape : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_a^b \|f_n(t)\|\,dt \geq \| \int_a^b f_n(t)\,dt \|$

Par $(*_1)$ et $(*_2)$ on conclut : $\int_a^b \|f(t)\|\,dt \geq \| \int_a^b f(t)\,dt \|$

3. Montrer le th du point fixe de Banach : [Voir ques° 1 - 226]

4. Pq si f est continue sur I, alors $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est dérivable sur I, de dérivée f ?

[Voir ques° - 7]

5. Réciproquement, si F est C^1, pq $F(x) = \int_a^x F'(t)\,dt + F(a)$?

On utilise la question 4, avec $f = F'$ continue (car F C^1) et on trouve que $G(x) = \int_a^x F'(t)\,dt$ est tq $G'(x) = F'(x)$ donc $\forall x \in I$, $G'(x) - F'(x) = (G - F)'(x) = 0$. Ainsi grâce au TAF, on a : $G - F(x) = C$, en évaluant en $x = a$ on trouve $C = -F(a)$ et finalement :

$$F(x) = G(x) - C = \int_a^x F'(t)\,dt + F(a).$$