<u>Décomposition de Dunford</u> : 1

Gourdon - Algèbre p. 194-195.

<u>Th</u>: Soit $f\in\mathcal{L}(E)$ tel que χ_f soit scindé sur $\mathbb{K}$. Alors $\exists!\,(d,n)\in\mathcal{L}(E)^2$ tq :

(i) d diagonalisable, n nilpotent (ii) $f=d+n$, $d\circ n = n\circ d$. De plus d, n sont des polynomes en f.

<u>Lemme</u> : Soient $f\in\mathcal{L}(E)$ et $P\in\mathbb{K}[X]$ tel que $P(f)=0$. Soit $P=\prod_{i=1}^{s} M_i^{\alpha_i}$ sa décomposition en facteurs irréductibles. $\forall i\in[\![1,s]\!]$, on note $N_i=\mathrm{Ker}(M_i^{\alpha_i}(f))$. On a alors :
$E=\bigoplus_{i=1}^{s} N_i$ et $\forall i\in[\![1,s]\!]$ la projection sur N_i parallèlement à $\bigoplus_{j\neq i} N_j$ est un polynome en f.

<u>dem Lemme</u> : Par le lemme des noyaux, on a : $E=\bigoplus_{i=1}^{s} N_i$ car les $M_i^{\alpha_i}$ sont 1ers entre eux 2 à 2.

<u>Construction du projecteur</u> : $\forall i\in[\![1,s]\!]$, on pose $Q_i=\prod_{j\neq i} M_j^{\alpha_j}$.

Aucun facteur n'est commun à tous les Q_i donc ils sont <u>1ers entre eux dans leur ensemble</u>.

d'après Bezout, $\exists\,(U_1,\dots,U_s)\in\mathbb{K}[X]^s$ tq $\sum_{i=1}^{s} Q_iU_i=1$.

$\forall i\in[\![1,s]\!]$, on pose $Q_iU_i(f)=\pi_i$ et on a donc $\sum_j \pi_j=\mathrm{Id}$ (*)

On fixe $i\in[\![1,s]\!]$, si $j\neq i$ alors
$$\pi_i\circ\pi_j = Q_i(f)\circ U_i(f)\circ Q_j(f)\circ U_j(f)$$
$$\underset{\mathbb{K}[X]\text{ est commutatif}}{=} U_i(f)\circ\underbrace{Q_i(f)\circ Q_j(f)}_{Q_iQ_j(f)\text{ et comme } Q_iQ_j \text{ contient } P \text{ donc } =0}\circ U_j(f)$$
$$=0$$

Ainsi par (*), $\pi_i=\sum_j \pi_i\circ\pi_j=\pi_i^2$ donc π_i est un projecteur.

<u>Montrons que $\mathrm{Im}(\pi_i)=N_i$</u> :

$\boxed{\subset}$ Soit $x\in E$, $M_i^{\alpha_i}(f)(\pi_i(x))=(\underbrace{M_i^{\alpha_i}Q_i}_{P}U_i)(f)(x)=(U_i(f)\circ P(f))(x)=0$

$\boxed{\supset}$ $\forall j\neq i$, $M_i^{\alpha_i}\mid Q_j \Rightarrow$ si $x\in N_i$ alors $\forall j\neq i$ $\pi_j(x)=0$ et par (*) $x=\sum_j \pi_j(x)=\pi_i(x)$

<u>Montrons que $\mathrm{Ker}(\pi_i)=\bigoplus_{j\neq i} N_j$</u>

$\boxed{\subset}$ Si $x\in\mathrm{Ker}(\pi_i)$, alors par (*) $x=\sum_j \pi_j(x)=\sum_{j\neq i}\pi_j(x)\in\bigoplus_{j\neq i}\pi_j$.

$\boxed{\supset}$ Si $x\in N_j$ pour $j\neq i$, $\boxed{\supset}$ précédente entraîne $\pi_i(x)=0$.

///

<u>dem Th</u> :

. <u>Existence</u> : On utilise les mêmes notations que le lemme précédent et on l'applique au pol annulateur χ_f. On a alors $E=\bigoplus_{i=1}^{s} N_i=\bigoplus_{i=1}^{s}\mathrm{Ker}((f-\lambda_i\mathrm{Id})^{\alpha_i})$ où $\chi_f(X)=\prod_{i=1}^{s}(X-\lambda_i)^{\alpha_i}$.

On note $d=\sum_{i=1}^{s}\lambda_i\pi_i$ qui est diagonalisable car les π_i sont diagonalisables (ce sont des projections) et commutent 2 à 2.

et $n=f-d$. On $\forall i\in[\![1,s]\!]$, $n_{|N_i}=f-\lambda_i\mathrm{Id}$ et si on pose $\alpha=\max_{1\leq i\leq s}\alpha_i$ on trouve $n_{|N_i}^{\alpha}=0$ donc $n^{\alpha}=0$ et n est nilpotent.

d et n commutent car ce sont des polynomes en f et $f=d+n$.

Unicité : Soit (d', n') vérifiant les hypothèses. Comme $d' \circ n' = n' \circ d' \Rightarrow d' \circ f = f \circ d'$ et donc $d' \circ d = d \circ d'$ car $d \in \mathbb{K}[f]$. De même $n \circ n' = n' \circ n$.
Comme d et d' commutent et qu'ils sont diagonalisables ils sont diagonalisables dans la même base.
Donc $d - d'$ est diagonalisable or $d - d' = \underbrace{n' - n}_{\text{nilpotent}}$
Donc $d - d'$ est diago et nilpotent $\Rightarrow d - d' = 0$
$\Rightarrow d = d'$
$\Rightarrow n = n'$.

Recasage : 153 - 154 - 155 - 157.

Points délicats : - Quand on pose $P_i = \prod_{j \neq i} Q_j^{\alpha_j}$ aucun facteur n'est commun à tout les P_i car $\forall j \neq i,\ Q_j^{\alpha_j} \mid P_i$ (peut-être le dire au début).
- Lorsque l'on mq $\mathrm{Im}(\pi_i) = N_i$ pour $\boxed{2}$ on utilise le 1er point.
- Lorsque l'on mq $\ker(\pi_i) = \bigoplus_{j \neq i} N_j$ pour $\boxed{2}$ ———.

Questions : (1)

1. Vous utilisez le lemme des noyaux mais est-ce que vous le redémontrez pas ?

Je redémontre la décomposition. En effet : juste avant de mq $\ker(\Pi_i) = \bigoplus_{j \neq i} N_j$

On a montré la decomp car $x = \sum_j \Pi_j(x)$ et $Im(\Pi_j) = N_j$.

Pour l'intersec$^\circ$ nulle : si $i \neq j$ et $x \in N_i \cap N_j$ alors $\exists y, z \in E$ tq $x = \Pi_i(y) = \Pi_j(z)$

en composant par Π_i on trouve $\underset{\Pi_i(y) = x}{\Pi_i^2(y)} = \underbrace{(\Pi_i \circ \Pi_j)}_{0}(z)$ donc $x = 0$.

2. Pq $n_{|N_i} = f - \lambda_i Id$? Car $\forall x \in N_i$, $\Pi_i(x) = x$ donc $\Pi_{i|N_i} = Id_{|N_i}$.

3. Pq $n' - n$ est nilpotent ? Comme n' et n commutent on peut utiliser la formule du binome de Newton et en notant α l'indice de nilpotence n et β celui de n' on trouve :

$$(n' - n)^{\alpha+\beta} = \sum_{k=0}^{\alpha+\beta} \binom{\alpha+\beta}{k} n'^k (-n)^{\alpha+\beta-k} = 0$$

si $0 \leq k \leq \beta \Rightarrow \alpha + \beta - k \geq \alpha \Rightarrow n^{\alpha+\beta-k} = 0$

si $\beta \leq k \leq \alpha+\beta \Rightarrow k \geq \beta \Rightarrow n'^k = 0$.

4. L'application $M \mapsto d$ (partie diago dans Dunford) est elle continue ?

Si $n = 1$ oui. Si $n \geq 2$ non, en effet si $\varphi : M_n(\mathbb{C}) \to D_n(\mathbb{C})$, $d + n \mapsto d$ était continue

comme $\forall D \in D_n(\mathbb{C})$, $\varphi(D) = D$ et que si $M \in M_n(\mathbb{C})$ $\exists D_m \in D_n(\mathbb{C})$ tq $D_m \xrightarrow[m \to +\infty]{} M$

(par densité de $D_n(\mathbb{C})$ dans $M_n(\mathbb{C})$) on aurait $\underset{\varphi(M)}{\lim_{m \to +\infty} \varphi(D_m)} = \underset{M}{\lim_{m \to +\infty} D_m}$

Ainsi toutes les matrices de $M_n(\mathbb{C})$ seraient diagonalisables $\lightning$

5. Donner la décomposition de Dunford de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

C'est $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ car cette matrice est diagonalisable (et non pas $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$).

6. Decomp de Dunford de $exp(A)$ Voir dev sur $exp(A)$

7. Montrer d'une autre manière que n est nilpotent :

$n = \left(-\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \Pi_i + f\right) = \sum_{i=1}^{p} (f - \lambda_i Id) \Pi_i$. Soit $\mathcal{P}_k$: " $n^k = \sum_{i=1}^{p} (f - \lambda_i Id)^k \Pi_i$ " pour $k \in \mathbb{N}^*$

$\sum_{i=1}^{p} \Pi_i = Id$

- Initialisa$^\circ$: $n^0 = Id = \sum_{i=1}^{p} (f - \lambda_i Id)^0 \Pi_i$
- Hérédité : Supposons $\mathcal{P}_k$.

$n^{k+1} = \left(\sum_{i=1}^{p} (f - \lambda_i Id)\Pi_i\right)^k \left(\sum_{i=1}^{p} (f - \lambda_i Id)\Pi_i\right)$

$\overset{H-R}{=} \left(\sum_{i=1}^{p} (f - \lambda_i Id)^k \Pi_i\right)\left(\sum_{i=1}^{p} (f - \lambda_i Id)\Pi_i\right)$

$= \sum_{i=1}^{p} (f - \lambda_i Id)^{k+1} \Pi_i$

$\boxed{\cdot\ \Pi_i \text{ commutent avec } f \quad \cdot\ \Pi_i \circ \Pi_j = 0 \quad \cdot\ \Pi_i^2 = \Pi_i}$

Ainsi en prenant $k = \max_{1 \leq i \leq n} \alpha_i$ on trouve $n^k = \sum_{i=1}^{p} (f - \lambda_i Id)^k \Pi_i = 0$.

8. Ecrire $\exp(A)$ en fc° de d et n :

Par Dunford on a : $A = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \Pi_i + A - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \Pi_i = d + n$ donc comme d et n commutent : $\exp(A) = \exp(d)\exp(n)$

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, on a $d^k = \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \Pi_i\right)^k = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^k \Pi_i$ et comme $\sum_{i=1}^{p} \Pi_i = Id$ ceci est vrai $\forall k \in \mathbb{N}^*$.

$\Pi_i^2 = \Pi_i$ et $\Pi_i \circ \Pi_j = 0$

donc : $\exp(d) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{d^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \Pi_i\right)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^k \Pi_i = \sum_{i=1}^{p} \Pi_i \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda_i^k}{k!}\right) = \sum_{i=1}^{p} e^{\lambda_i} \Pi_i$

$\exp(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(\sum_{i=1}^{p} (A - \lambda_i Id)\Pi_i\right)^k \underset{\boxed{7}}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(\sum_{i=1}^{p} (A-\lambda_i Id)^k \Pi_i\right)$

$= \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} (A-\lambda_i Id)^k \Pi_i$ ......

$= \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=0}^{\alpha_i - 1} \frac{1}{k!} (A-\lambda_i Id)^k \Pi_i$

donc $\exp(A) = \left(\sum_{i=1}^{p} e^{\lambda_i} \Pi_i\right)\left(\sum_{i=1}^{p} \sum_{k=0}^{\alpha_i-1} \frac{1}{k!}(A-\lambda_i Id)^k \Pi_i\right) \underset{1}{=} \sum_{i=1}^{p} e^{\lambda_i} \sum_{k=0}^{\alpha_i - 1} \frac{1}{k!} (A-\lambda_i Id)^k \Pi_i$.

$\cdot\ \Pi_i^2 = \Pi_i$ $\quad \cdot\ \Pi_i \circ A = A \circ \Pi_i$

$\cdot\ \Pi_i \circ \Pi_j = \Pi_j \circ \Pi_i$

9. Appliquer ceci pour calculer $\exp\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$: $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

On calcule : $\chi_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 4 & -2 \\ 0 & 6-X & -3 \\ -1 & 4 & -X \end{vmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{=} \begin{vmatrix} 1-X & 4 & -2 \\ 0 & 6-X & -3 \\ -2+X & 0 & -X+2 \end{vmatrix} = (X-2)\begin{vmatrix} 1-X & 4 & -2 \\ 0 & 6-X & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \underset{C_3 \leftarrow C_3 + C_1}{=} \begin{vmatrix} 1-X & 4 & -1-X \\ 0 & 6-X & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} (X-2)$

$= (X-2)\begin{vmatrix} 4 & -1-X \\ 6-X & -3 \end{vmatrix} = -(X-2)\left((6-X)(-1-X) + 12\right)$

$= -(X-2)(+X^2 - 5X + 6)$

$= -(X-2)^2(X-3)$.

On cherche la décomposition en élément simple de $\chi_A(X)^{-1}$ pour trouver les coeffs de Bezout :
(Ici comme $rg(A - 2Id) = 2$ on $\chi_A = \Pi_A$)

$\frac{1}{\chi_A(X)} = \frac{a}{X-2} + \frac{b}{(X-2)^2} + \frac{c}{X-3} = \frac{a(X-2)(X-3) + b(X-3) + c(X-2)^2}{(X-2)^2(X-3)} = \frac{a[X^2 - 5X + 6] + b(X-3) + c(X^2 - 4X + 4)}{(X-2)^2(X-3)}$

$\Rightarrow \begin{cases} a + c = 0 \\ -5a - 4c + b = 0 \\ 6a + 4c - 3c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -c \\ -a = b \\ -a = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{\chi_A(X)} = -\left(\frac{1}{X-2} + \frac{1}{(X-2)^2}\right) + \frac{1}{X-3}$

$\frac{1}{\chi_A(X)} = -\left(\frac{X-1}{(X-2)^2}\right) + \frac{1}{X-3}$

donc $1 = -(X-1)(X-3) + 1 \times (X-2)^2$, on calcule : $(\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2)$

$\Pi_1(A) = (A - 2Id)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -3 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 3 & 4 & -6 \\ 3 & 4 & -6 \end{pmatrix}$, $\Pi_2(A) = -(A - Id)(A - 3Id) = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 0 & -5 & 3 \\ +1 & -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \\ -1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -2 & -4 & 6 \\ -3 & -3 & 6 \\ -3 & -4 & 7 \end{pmatrix}$

$\boxed{8}$ nous donne : $\exp(A) = e^3\, \Pi_1(A) + e^2\left(Id + (A - 2Id)\right)\Pi_2(A)$

$= e^3 \begin{pmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 3 & 4 & -6 \\ 3 & 4 & -6 \end{pmatrix} + e^2 \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 0 & 5 & -3 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -4 & 6 \\ -3 & -3 & 6 \\ -3 & -4 & 7 \end{pmatrix} = e^3 \begin{pmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 3 & 4 & -6 \\ 3 & 4 & -6 \end{pmatrix} + e^2 \begin{pmatrix} -6 & -4 & 10 \\ -6 & -3 & 9 \\ -7 & -4 & 11 \end{pmatrix}$