

Calcul de l'intégrale de Dirichlet: (7)

On appelle: $\text{sinc}: t \mapsto \begin{cases} \frac{\sin t}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

Bernis - 40 développements.
Analyse pour l'agrégation
p. 255 - 265

- Th: (1) L'application $F: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, $\alpha \mapsto \int_0^{+\infty} \text{sinc}(t) e^{-\alpha t} dt$ est bien définie et de classe C^1 .
(2) $\lim_{\alpha \rightarrow 0} F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \text{sinc}(t) dt = I$.
(3) $I = \frac{\pi}{2}$.

dem: (1) On note $f: \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ et on a:
 $(\alpha, t) \mapsto e^{-\alpha t} \text{sinc}(t)$

- $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto f(\alpha, t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car:
 - elle est continue donc intégrable au voisinage de 0
 - $f(\alpha, t) = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$, $\left(t \mapsto \frac{1}{t^2}\right) \in L^1([t_1, +\infty[)$ donc elle est intégrable au voisinage de $+\infty$.

$\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\alpha \mapsto f(\alpha, t)$ est de classe $C^1(\mathbb{R}_+^*)$ (comme composé de fonctions C^1) et on a:
 $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(\alpha, t) = -e^{-\alpha t} \text{sinc}(t)$ (on trouve cette formule pour $t \neq 0$ et on vérifie qu'elle coïncide lorsque $t=0$)

- Soit K un compact de $\mathbb{R}_+^*$, $\exists a > 0$ tq $\forall \alpha \in K$, $\alpha > a$.

$\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\forall \alpha \in K$, $\left| \frac{\partial f}{\partial \alpha}(\alpha, t) \right| \leq e^{-at} \in L^1(\mathbb{R}_+)$.

D'après le théorème C^1 sous le signe intégral, $\alpha \mapsto F(\alpha)$ est de classe $C^1(\mathbb{R}_+^*)$ et $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $F'(\alpha) = -\int_0^{+\infty} \text{sinc}(t) e^{-\alpha t} dt$.

$$\begin{aligned} \text{Donc: } F'(\alpha) &= -\text{Im} \left(\int_0^{+\infty} e^{-t(\alpha-i)} dt \right) = -\text{Im} \left(\frac{-1}{\alpha-i} e^{-t(\alpha-i)} \Big|_0^{+\infty} \right) \\ &= \text{Im} \left(\frac{-1}{\alpha-i} \right) = \text{Im} \left(\frac{-(\alpha+i)}{\alpha^2+1} \right) \\ &= \frac{1}{\alpha^2+1} \end{aligned}$$

Finalement, $\exists C \in \mathbb{R}$ tel que $F(\alpha) = -\arctan(\alpha) + C \Leftrightarrow (*)$

(2) L'application $t \mapsto \text{sinc}(t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, donc $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$
 $t \mapsto \int_0^t \text{sinc}(s) ds - I$
est de classe C^1 et vérifie: $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = 0$ et $g'(t) = \text{sinc}(t)$.

Ainsi par IPP, il vient: $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned} F(\alpha) &= g(t) e^{-\alpha t} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha t} g(t) dt \\ &= I + f(\alpha). \end{aligned}$$

Sat $\varepsilon > 0$, comme $g(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$, $\exists T > 0$ tq $\forall t > T, |g(t)| < \varepsilon/2$.

g est aussi continue donc $\exists M > 0$ tq $\forall t \in \mathbb{R}_+, |g(t)| < M$.

Ainsi si $\alpha \in]0, \frac{\varepsilon}{2+M}[$, il vient:

$$\begin{aligned} |h(\alpha)| &= \left| \int_0^T \alpha e^{-\alpha t} g(t) dt + \int_T^{+\infty} \alpha e^{-\alpha t} g(t) dt \right| \\ &\leq \alpha \int_0^T e^{-\alpha t} |g(t)| dt + \int_T^{+\infty} \alpha e^{-\alpha t} |g(t)| dt \\ &\leq \alpha M T + \frac{\varepsilon}{2} \int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha t} dt \end{aligned}$$

$$|h(\alpha)| \leq \varepsilon.$$

Ainsi $\lim_{\alpha \rightarrow 0} F(\alpha) = I$ et par unicité de la limite dans (*) on trouve $I = C$.

(3) Sat $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \in [1; +\infty[$ tel que $\alpha_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$. On note $\forall t \in \mathbb{R}_+, f_n(t) = f(\alpha_n t)$.

$\forall t \in \mathbb{R}_+^*$ (donc pour presque tout $t \in \mathbb{R}_+$), $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, |f_n(t)| \leq e^{-t}$ (since $f(t) \in L^1(\mathbb{R}_+)$).

donc par théorème de convergence dominée $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = 0$. Ce qui signifie, comme la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est quelconque que $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} F(\alpha) = 0$.

Ainsi $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \arctan(\alpha) - C = 0$ donc $C = \frac{\pi}{2}$ et finalement $I = \frac{\pi}{2}$.

Remarque: 235 - 236 - 239.

Points délicats: • Faire les choses dans cet ordre ($\neq$ Bernis)
• Calcul de $F'(x)$.

Question: (7)

1. Démontrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ converge:

$u' = \sin t, v = \frac{1}{t}$

Par intégration par parties. Soit $A > 1$. $\int_1^A \frac{\sin(t)}{t} dt = -\cos t \frac{1}{t} \Big|_1^A - \int_1^A \frac{\cos t}{t^2} dt \quad (*)$

Or $\forall t \in]1, A], \left| \frac{\cos t}{t^2} \right| \leq \frac{1}{t^2} \in L^1([1, A])$

Donc $t \mapsto \frac{\cos t}{t^2} \in L^1([1, +\infty[)$ et on note I la valeur de $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$.

Finalement en passant à la limite dans (*), il vient:

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{\sin(t)}{t} dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} -\cos 1 + \frac{\cos(A)}{A} - \int_1^A \frac{\cos t}{t^2} dt = -\cos 1 - I < +\infty.$$

De plus $\sin c$ est continue sur $[0, \pi]$ donc il est intégrable sur $[0, 1]$.

2. Mq $\frac{\sin(t)}{t} \notin L^1(\mathbb{R}_+)$: On a pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \int_0^{n\pi} \left| \frac{\sin(t)}{t} \right| dt &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{|t|} dt \stackrel{t=x+k\pi, dx=dt}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^\pi \frac{|\sin(x+k\pi)|}{|x+k\pi|} dx \\ &\geq \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^\pi \frac{\sin(x)}{\pi(k+1)} dx \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\pi(k+1)} \times 2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty. \end{aligned}$$

3. Démontrer que si f est continue sur $I, f: x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ est de classe C^1 .

Soit $x_0 \in I$, comme f est continue en x_0 . On a: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Soit $\varepsilon > 0, \exists \eta$ tq $\forall x \in I, |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

$$\begin{aligned} \forall x \in I, |x - x_0| < \eta \text{ on a: } \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| &= \left| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t) dt - f(x_0) \right| \\ &= \left| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0)) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{|x - x_0|} \int_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)| dt \\ &\leq \varepsilon \frac{|x - x_0|}{|x - x_0|} \end{aligned}$$

Donc $F'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$.

4. Vous avez dit que F est C^1 (dans le des) sur $\mathbb{R}_+^*$, est-ce que on a pas mieux?

On a mq F' se prolonge par continuité sur $\mathbb{R}_+$ donc F est C^1 sur $\mathbb{R}_+$.

5. Donner un autre argument que TCD pour conclure:

$$\forall x \in [0, t]$$

Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto \sin(x)$ sur $[0, t]$ est dérivable et comme $|\sin'(x)| = |\cos(x)| \leq 1$

par le TAF: $|\sin(t) - \sin(0)| \leq 1 \times |t - 0| \Rightarrow \left| \frac{\sin(t)}{t} \right| \leq 1$ [c'est vrai aussi en $t=0$ car $\sin'(0) = 1$]

$$\text{Donc } |F(x)| = \left| \int_0^{+\infty} \sin(t) e^{-xt} dt \right| = \left| \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \sin(t) e^{-xt} dt \right|$$

$$|\sin(t)| \leq 1 \Rightarrow \leq \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

6. Donner d'autres méthodes pour calculer I:

1. Par Fubini: Méthode: Remarquer que $\frac{1}{x} = \int_0^{+\infty} e^{-xy} dy$, utiliser Fubini-Tonelli pour calculer $\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \sin(x) e^{-xy} dy dx$ et conclure par calcul + CVD.

2. Par Fourier-Plackner: Comme $\mathcal{F}\left(\frac{1}{2} \chi_{[-1,1]}\right)(\xi) = \frac{\sin(\xi)}{\xi}$ et que:

$$\chi_{[-1,1]} \in L^1 \cap L^2 \text{ d'où } 2\pi \left\| \frac{1}{2} \chi_{[-1,1]} \right\|_2^2 = \left\| \frac{1}{2} \chi_{[-1,1]} \right\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2(u)}{u^2} du$$

$$\begin{aligned} - \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(u)}{u^2} du &= \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(2u)}{2u^2} du \stackrel{\text{IPP}}{=} \left[-\frac{(1 - \cos(2u))}{2u} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{2u} 2 \sin(u) du \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - \text{Finalement comme } \frac{\sin^2(u)}{u^2} \text{ est pair } \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u^2} du = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(u)}{u^2} du \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$