

# Unicité des coefficients d'une série trigonométrique

On se propose de démontrer le théorème suivant, dû à Georg Cantor (c'est d'ailleurs en voulant généraliser ce résultat qu'il sera amené à développer la théorie des ordinaux et des cardinaux) :

**Théorème 1.** Soit  $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  une suite de nombres complexes telle que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , la série  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$  converge simplement vers 0 (c'est-à-dire que  $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx}$  existe et vaut 0). Alors  $c_n = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ .

Le problème principal est qu'on n'a a priori aucune information sur la décroissance des coefficients. Le plan est le suivant : on commence par traiter le cas où  $c_n \rightarrow 0$ , on ramènera le cas général à ce cas là. Dans le cas où  $c_n \rightarrow 0$ , on introduit la série dont les coefficients sont (grosso modo)  $c_n/n^2$ , série à laquelle on peut appliquer toute la théorie de Fourier car les coefficients décroissent rapidement. Cette nouvelle série est une sorte de primitive seconde de la série initiale, on relie le comportement des deux séries grâce à un critère de convexité, et on conclut.

*Démonstration.* On suppose  $c_n \rightarrow 0$ . On pose  $F(x) = c_0 \frac{x^2}{2} + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{c_n}{(in)^2} e^{inx}$ . Cette fonction est bien définie et est continue sur  $\mathbb{R}$  par convergence normale. Le critère de convexité qu'on utilisera est le suivant (on ne le démontrera pas) :

**Lemme 1.** Pour  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue, on définit  $g(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}$ , quand cette limite existe. Si  $g$  existe pour tout  $x$  et est positif, alors  $f$  est convexe. Si  $g$  est nulle, alors  $f$  est affine.

On cherche donc à calculer  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)}{h^2}$ .

On trouve  $\frac{F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)}{h^2} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}) \left( \frac{\sin(nh/2)}{\sin(h/2)} \right)^2$ .

Pour évaluer cette limite, on utilise le lemme suivant (on le démontrera plus tard) :

**Lemme 2.** Soit  $\sum a_n$  une série de nombres complexes, convergente de somme nulle. On pose pour  $t \in \mathbb{R}^*$ ,  $U_0(t) = 1$  et pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $U_n(t) = \left( \frac{\sin(nt)}{nt} \right)^2$ . Alors pour tout  $t \in \mathbb{R}^*$ ,  $S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n U_n(t)$  existe et tend vers 0 quand  $t$  tend vers 0.

Ce lemme s'applique en prenant  $a_n = c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}$  et  $t = h/2$ , on peut donc appliquer le critère de convexité et en déduire que  $F$  est affine, donc de la forme  $x \mapsto ax + b$ . Ainsi,  $ax + b - c_0 x^2/2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{c_n}{(in)^2} e^{inx}$  est périodique, donc  $a = c_0 = 0$ , donc  $b = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{c_n}{(in)^2} e^{inx}$ . Par convergence normale, cette série est égale à sa série de Fourier, donc  $c_n/(in)^2 = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}^*$ , donc  $c_n = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ .

Traisons maintenant le cas général, c'est-à-dire sans l'hypothèse  $c_n \rightarrow 0$ . Soient  $x, u \in \mathbb{R}$ . On évalue la série initiale en  $x+u$  et  $x-u$  et on somme les résultats. On obtient  $0 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}) e^{inu}$ . On considère  $x$  comme fixé et on voit cette somme comme une série trigonométrique en  $u$ , dont les coefficients sont  $d_n = c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}$ . Ces coefficients tendent vers 0 car la série  $\sum c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}$  converge. Ainsi, le cas  $c_n \rightarrow 0$  implique que  $d_n = 0$ , c'est-à-dire que  $c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx} = 0$ , pour tout  $n$  et tout  $x$ , donc  $c_n = 0$  pour tout  $n$ . □

*Démonstration.* Prouvons le lemme 2.  $S(t)$  est bien défini car  $|a_n U_n(t)| \leq |a_n|/(nt)^2$  et  $a_n \rightarrow 0$  car  $\sum a_n$  converge.

Notons  $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$ . Une transformation d'Abel donne  $\sum_{n=0}^N a_n U_n(t) = \sum_{n=0}^{N-1} s_n (U_n(t) - U_{n+1}(t)) + s_N U_N(t)$ , et comme  $s_N U_N(t) \rightarrow 0$  quand  $N \rightarrow \infty$ , on a  $S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n (U_n(t) - U_{n+1}(t))$ .

On obtient la majoration  $|S(t)| \leq (\sup_{n \in \mathbb{N}} |s_n|) \sum_{n=0}^{N-1} |U_n(t) - U_{n+1}(t)| + (\sup_{n \geq N} |s_n|) \sum_{n=N}^{\infty} |U_n(t) - U_{n+1}(t)|$ .

Une comparaison série-intégrale donne que  $|U_n(t) - U_{n+1}(t)| \leq \int_{nt}^{(n+1)t} f$  où  $f(x) = \frac{d}{dx} \left( \frac{\sin(x)}{x} \right)^2$ . On vérifie que  $f$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Ainsi, étant donné  $\epsilon$ , on a pour  $N$  assez grand,  $(\sup_{n \geq N} |s_n|) \sum_{n=N}^{\infty} |U_n(t) - U_{n+1}(t)| \leq \epsilon$ . Puis, comme  $U_n(t) \rightarrow 1$  quand  $t \rightarrow 0$ , on a pour  $t$  assez proche de 0  $(\sup_{n \in \mathbb{N}} |s_n|) \sum_{n=0}^{N-1} |U_n(t) - U_{n+1}(t)| \leq \epsilon$ , ce qui montre que  $S(t) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow 0$ . □

Source : Gourdon, Analyse, p288, problème 22 (théorème de Cantor sur les séries trigonométriques)

Le passage du cas  $c_n \rightarrow 0$  au cas général n'est pas fait de la même manière dans le Gourdon, la preuve présentée ici est beaucoup plus simple.

Sans doute compatible avec une leçon sur la convexité, en présentant la preuve du lemme 1 (qui est dans le Gourdon aussi), et en zappant par exemple la preuve du lemme 2.