La fonction de Fabius

On introduit une variable aléatoire dont la fonction de répartition est de classe C^∞ mais n'est analytique en aucun point.

Proposition 1. Soient $(U_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ des variables aléatoires iid de loi uniforme sur $[0,1]$. Soit $X=\sum_{i=1}^\infty \frac{U_i}{2^i}$. Soit F_X la fonction de répartition de X, restreinte à l'intervalle $[0,1]$. Alors F_X se prolonge en une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$ mais analytique nulle part.

Démonstration. On a $X=\frac{1}{2}U_1+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^\infty \frac{U_{i+1}}{2^i}=\frac{1}{2}U_1+\frac{1}{2}Y$, où Y a même loi que X et est indépendant de U_1. On a donc, pour tout $x\in[0,1]$,

$$\begin{aligned}F_X(x)&=\int_0^1 F_X(2x-u)\,du=\int_{2x-1}^{2x}F_X(v)\,dv\\&=\begin{cases}\int_0^{2x}F_X(v)\,dv \text{ si } x\in[0,1/2]\\ \int_{2x-1}^1 F_X(v)\,dv+2x-1 \text{ si } x\in[1/2,1]\end{cases}\end{aligned}$$

On prolonge F_X en f sur $\mathbb{R}^+$ par : si $x\in]1,2]$, $f(x)=1-f(x-1)$. Puis, par récurrence sur n, si $x\in]2^n,2^{n+1}]$, $f(x)=-f(x-2^n)$. On pourra consulter la page Wikipedia pour avoir une idée de l'allure de cette fonction.

Lemme 1. Pour tout $x\in\mathbb{R}^+$, on a $f(x)=\int_0^{2x}f(t)\,dt$.

Si $x\in[0,1/2]$, c'est bon.
Si $x\in[1/2,1]$,

$$\begin{aligned}\int_0^{2x}f&=\int_0^{2x-1}f+\int_{2x-1}^1 f+\int_1^{2x}f\\&=\int_0^{2x-1}f+\int_{2x-1}^1 F_X+\int_1^{2x}1-f(t-1)\,dt\\&=\int_{2x-1}^1 F_X+2x-1\\&=F_X(x)=f(x)\end{aligned}$$

Si $x\in]2^n,2^{n+1}]$, par récurrence sur n :

$$\begin{aligned}f(x)&=-f(x-2^n)\\&=-\int_0^{2x-2^{n+1}}f\\&=\int_0^{2x-2^{n+1}}f(t+2^{n+1})\,dt\\&=\int_{2^{n+1}}^{2x}f\\&=\int_0^{2x}f\end{aligned}$$

car $\int_0^{2^{n+1}}f=0$.

Ceci termine la preuve du lemme. Le lemme implique que f est C^∞ sur $\mathbb{R}^+$, et vérifie $f'(x)=2f(2x)$, et que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f^{(n)}(x)=2^{\frac{n(n+1)}{2}}f(2^nx)$.

Montrons maintenant que f n'est analytique en aucun point. Les zéros de f sont exactement les entiers pairs. En un point z de la forme $\frac{2m+1}{2^n}$, on a $f^{(k)}(z)=0$ si $k\geq n+1$. En un point irrationnel, toutes les dérivées de f sont non-nulles. Ainsi, si f est analytique au voisinage d'un point x, alors par densité des dyadiques, f est analytique au voisinage d'un dyadique, donc est un polynôme au voisinage de ce point (car toutes ses dérivées d'ordre assez grand sont nulless en ce point). Ceci contredit le fait que les dérivées de f en un irrationnel sont toutes non-nulles.

Pour prolonger f à $\mathbb{R}$ tout entier, on peut par exemple poser $f(x)=f(-x)$. Le raccord est bien C^∞ car f et toutes ses dérivées s'annulent en 0. □

Remarque 1. Ma source principale est l'article A probabilistic Example of a Nowhere Analytic C^∞-Function, J. Fabius. Je ne connais pas de livre où ce développement est traité.