

Sur les automorphismes de S_n

Un développement classique est le théorème suivant :

Théorème 1. Si $n \neq 6$, les seuls automorphismes de S_n sont les automorphismes intérieurs.

La preuve de ce résultat se fait en général en deux étapes. Premièrement, on prouve qu'un automorphisme de S_n qui conserve les transpositions est intérieur. Deuxièmement, on trouve une propriété qui distingue les transpositions des autres éléments de S_n . Par exemple, une transposition est d'ordre 2, donc est envoyé sur un élément d'ordre 2, puis on peut ensuite compter le cardinal des classes de conjugaison des éléments d'ordre 2 de S_n , et conclure. C'est fait par exemple dans le Perrin. Il propose également une deuxième méthode, plus algébrique.

On propose ici une autre manière de faire cette deuxième étape.

Proposition 1. Soit $n \neq 4, 6$. Soit $\tau \in S_n$. Alors τ est une transposition si et seulement si τ est d'ordre 2 et ses commutateurs $[\sigma, \tau] = \sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}$, avec $\sigma \in S_n$, sont d'ordre 1, 2 ou 3.

Démonstration. Si $\tau = (ab)$ est une transposition, alors τ est d'ordre 2, et un commutateur $[\sigma, \tau] = \sigma(ab)\sigma^{-1}(ab) = (\sigma(a)\sigma(b))(ab)$ est soit Id, soit un 3-cycle, soit une double-transposition, donc d'ordre 1, 2 ou 3 (l'hypothèse $n \neq 4, 6$ n'intervient pas ici).

Réciproquement, supposons τ d'ordre 2 et n'étant pas une transposition. On va lui trouver un commutateur d'ordre ≥ 4 . Étant d'ordre 2, τ est un produit de transpositions à supports deux-à-deux disjoints. Considérons les deux exemples suivants :

- Si $\tau = (12)(34)$, prenons $\sigma = (135)$. On obtient

$$[\sigma, \tau] = (135)(12)(34)(153)(12)(34) = (13542)$$

qui est d'ordre ≥ 4 .

- Si $\tau = (12)(34)(56)(78)$, prenons $\sigma = (1357)$. On obtient

$$[\sigma, \tau] = (1357)(2864)$$

qui est d'ordre ≥ 4 .

Le deuxième exemple montre que si τ est produit d'au moins 4 transpositions à supports disjoints, alors elle a un commutateur d'ordre ≥ 4 . Le premier exemple montre que si τ est produit d'au moins deux transpositions à supports disjoints et a un point fixe, alors elle a un commutateur d'ordre ≥ 4 . De plus, comme $n \neq 4, 6$, si τ est produit de deux ou trois transpositions à supports disjoints, alors elle a un point fixe. Ceci termine l'argument. □

Remarque 1. • L'argument ne marche pas pour $n = 6$, car il y a des automorphismes extérieurs de S_6 , qui envoie les transpositions sur les triples transpositions.

- L'argument ne marche pas pour $n = 4$, car dans S_4 , les seuls éléments d'ordre ≥ 4 sont les 4-cycles, et ce ne sont pas des commutateurs car ils sont de signature -1 . Cependant, le résultat sur les automorphismes est valable pour $n = 4$, il faut donc utiliser un argument spécifique pour ce cas là, par exemple comparer la taille des classes de conjugaison.