Théorème de Bohr-Mollerup

Lemme — $\forall x > 0,\ \Gamma(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^x\, n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$.

DÉMONSTRATION
Soit $x > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$f_n : t \mapsto \begin{cases} t^{x-1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n & \text{si } t \in]0;n] \\ 0 & \text{si } t \geqslant n \end{cases}.$$

Soit $t > 0$.

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n &= \exp\left(n\ \ln\left(1-\frac{t}{n}\right)\right) = \exp\left(n\left[-\frac{t}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]\right) \\ &= \exp(-t + o(1)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-t}.\end{aligned}$$

D'où

$$\forall t > 0,\ \lim_{n\to+\infty} f_n(t) = t^{x-1}\, e^{-t}.$$

De plus $\forall t > 0,\ \forall n > t,\ t^{x-1}\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n \leqslant t^{x-1}e^{-t}$ intégrable.

D'après le théorème de convergence dominée

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(t)\, dt = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\, e^{-t}\, dt = \Gamma(x).$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt &= \int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\,dt \\
&= \int_0^1 (nu)^{x-1}(1-u)^n\,n\,du \text{ par le changement de variables } u = nt \\
&= n^x \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n\,du \\
&= n^x\,I_n(x) \text{ en notant } I_n(x) = \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n\,du.
\end{aligned}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
I_n(x) &= \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n\,du \\
&= \left[\frac{u^x(1-u)^n}{x}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{-u^x\,n(1-u)^{n-1}}{x}\,du \text{ par intégration par parties} \\
&= \frac{n}{x} I_{n-1}(x+1) \\
&= \frac{n(n-1)\dots 1}{x(x+1)\dots(x+n-1)} I_0(x+n) \text{ par récurrence immédiate} \\
&= \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n-1)} \int_0^1 u^{x+n-1}\,du \\
&= \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x\,n!}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

Théorème
Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}^{+*}$ *logarithmiquement convexe telle que* $f(1) = 1$ *vérifiant l'équation fonctionnelle*

$$\forall x > 0,\; f(x+1) = x \cdot f(x).$$

Alors

$$f = \Gamma.$$

DÉMONSTRATION

<u>Existence</u> On montre que Γ respecte ces hypothèses.

Γ vérifie immédiatement l'équation fonctionnelle et $\Gamma(1) = 1$.

Comme Γ est de classe $\mathcal{C}^2$, $\ln \circ \Gamma$ est deux fois dérivable et on utilise la caractérisation des fonctions convexes.

Soit $x > 0$.

$$\big(\ln \circ \Gamma\big)''(x) = \left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}\right)'(x) = \frac{\Gamma''\,\Gamma - (\Gamma')^2}{\Gamma^2}(x)$$

Alors par théorème de dérivation sous le signe intégrale,

$$\begin{aligned}
\Gamma'(x)^2 &= \left(\int_0^{+\infty} \ln(t)\; t^{x-1} e^{-t}\; dt\right)^2 \\
&= \left(\int_0^{+\infty} \left(\ln(t)\; t^{\frac{x-1}{2}} e^{-t/2}\right) \cdot \left(t^{\frac{x-1}{2}} e^{-t/2}\right)\; dt\right)^2 \\
&\leqslant \left(\int_0^{+\infty} \ln(t)^2\; t^{x-1} e^{-t}\; dt\right)\left(\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\; dt\right) \\
&\qquad \text{par théorème de Cauchy-Schwarz car ces fonctions sont bien dans } \mathrm{L}^2 \\
&\leqslant \Gamma''(x) \cdot \Gamma(x).
\end{aligned}$$

Ainsi on a bien $\forall x > 0,\ \big(\ln \circ \Gamma\big)''(x) \geqslant 0$, ce qui est suffisant pour conclure.

<u>Unicité</u> Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}^{+*}$.

On pose $g = \ln \circ f$ convexe. Soit $x \in]0;1]$.

D'après l'inégalité des 3 pentes, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{g(n+1) - g(n)}{n+1-n} \leqslant \frac{g(n+1+x) - g(n+1)}{n+1+x-(n+1)} \leqslant \frac{g(n+2) - g(n+1)}{n+2-(n+1)}.$$

Or $g(n+1) = \ln(f(n+1)) = \ln(n\, f(n)) = \ln(n) + g(n)$ d'après l'équation fonctionnelle.

Donc

$$\ln(n) \leqslant \frac{1}{x} \ln\left(\frac{f(n+1+x)}{f(n+1)}\right) \leqslant \ln(n+1)$$

soit

$$n^x \leqslant \frac{f(n+1+x)}{f(n+1)} \leqslant (n+1)^x.$$

D'après l'équation fonctionnelle,

$$n^x \leqslant \frac{(n+x)\dots(1+x)x\, f(x)}{n!\, f(1)} \leqslant (n+1)^x$$

soit

$$\frac{n^x\, n!}{(x+1)\dots(x+1)x} \leqslant f(x) \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^x \frac{n^x\, n!}{(x+1)\dots(x+1)x}.$$

On passe à la limite $n \to +\infty$

$$\Gamma(x) \leqslant f(x) \leqslant \Gamma(x).$$

L'équation fonctionnelle implique que $f = \Gamma$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.