
Structure des groupes abéliens finis

Lemme — G et son dual $\widehat{G}$ ont le même exposant.

DÉMONSTRATION

Soit H un groupe abélien d'exposant $\exp(H) = N$.

Soit $\chi \in \widehat{H}$.

Alors $\forall x \in H, \chi(x)^N = \chi(x^N) = \chi(1) = 1$.

D'où

$$\chi^N = 1.$$

On en déduit que $\exp(\widehat{H}) \leq \exp(H)$.

En particulier, $\exp(\widehat{\widehat{G}}) \leq \exp(\widehat{G}) \leq \exp(G)$.

D'après l'isomorphisme entre G et $\widehat{\widehat{G}}$, on a égalité des exposants. □

Théorème

Soit G groupe abélien fini. Il existe un unique $r \in \mathbb{N}$ et des uniques $N_1, \dots, N_r$ tels que

- N_1 est l'exposant de G
- $\forall i \in \llbracket 1; r-1 \rrbracket, N_{i+1} \mid N_i$
- $G \simeq \prod_{i=1}^r \mathbb{Z}/N_i\mathbb{Z}$.

DÉMONSTRATION

On démontre le théorème par récurrence sur $|G| \geq 1$.

Si $|G| = 1$ alors $G = \{1\}$ et le théorème est trivial.

Soit G groupe abélien d'ordre au moins 2.

On note N_1 l'exposant de G .

Comme N_1 est aussi l'exposant de $\widehat{G}$, $\forall x \in G, \forall \chi \in \widehat{G}, \chi(x)^{N_1} = 1$ soit

$$\forall x \in G, \forall \chi \in \widehat{G}, \chi(x) \in \mu_{N_1}$$

où μ_{N_1} est le groupe des racines N_1 -èmes de l'unité.

Par définition de l'exposant, il existe $\chi_1 \in \widehat{G}$ d'ordre N_1 .

Comme pour tout $x \in G$, $\chi_1(x)$ est d'un ordre divisant N_1 (car $\chi_1(x) \in \mu_{N_1}$) et χ_1 est d'ordre N_1 , il existe $x_1 \in G$ tel que $\chi_1(x_1)$ d'ordre N_1 .

Alors $\forall k \mid N_1, k \neq N_1, \chi_1(x_1^k) = \chi_1(x_1)^k \neq 1$.

Or l'ordre de $x_1 \in G$ divise N_1 . Donc x_1 est d'ordre exactement N_1 .

On note $H_1 = \langle x_1 \rangle$ et $G_1 = \ker \chi_1$.

On remarque que χ_1 induit un isomorphisme entre H_1 et μ_{N_1} .

En effet $|H_1| = |\mu_{N_1}|$ et $\chi_1 : H_1 \rightarrow \mu_{N_1}$ est surjective car $\mu_{N_1} = \langle \chi_1(x_1) \rangle$.

On note $\alpha = \chi_1^{-1}$.

On montre que $G = H_1 \oplus G_1$.

Soit $g \in G$.

On pose $a = \alpha(\chi_1(g)) \in H_1$ et $b = a^{-1}g$.

Alors

$$\chi_1(a) = \chi_1(g) \text{ et } \chi_1(b) = \chi_1(a)^{-1} \chi_1(g) = 1 \text{ d'où } b \in G_1.$$

On a montré que $\forall g \in G, \exists a \in H_1, \exists b \in G_1, g = ab$ soit

$$G = H_1 + G_1.$$

De plus $H_1 \cap G_1 = \{x_1^k, k \in \llbracket 0; N_1 - 1 \rrbracket / \chi_1(x_1^k) = 1\} = \{1\}$.

Si $G_1 = \{1\}$ alors $G = H_1 \simeq \mathbb{Z} / N_1 \mathbb{Z}$.

Si $|G_1| > 1$ alors on utilise l'hypothèse de récurrence :

$$G_1 \simeq \prod_{i=2}^r \mathbb{Z} / N_i \mathbb{Z} \text{ avec } N_{i+1} \mid N_i \text{ où } N_2 \text{ est l'exposant de } G_1.$$

Comme G_1 est un sous-groupe de G , son exposant N_2 divise N_1 . □