
Simplicité de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$

Théorème

$\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ est simple.

DÉMONSTRATION

Soit G un sous-groupe distingué de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$. On note G_0 la composante connexe par arcs de I_n dans G .

Soient $g, h \in G_0$.

On note γ_1 et γ_2 des chemins continus $[0; 1] \rightarrow G_0$ qui relie I_n à g et h respectivement.

Par continuité de la multiplication matricielle et de l'inversion matricielle, l'application $t \mapsto \gamma_1(t)\gamma_2(t)^{-1}$ est continue. Comme G est un sous-groupe de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, l'application $\gamma_1\gamma_2^{-1}$ est à valeurs dans G et forme un chemin continu dans G de I_n à gh^{-1} .

Donc $gh^{-1} \in G_0$.

On conclut que G_0 est un sous-groupe de G .

Soient $g \in G_0$ et $h \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

On note $\gamma : [0; 1] \rightarrow G_0$ un chemin qui relie I_n à g .

Par continuité de la conjugaison par un élément de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, l'application $h\gamma h^{-1}$ est un chemin continu de I_n à hgh^{-1} .

Donc $hgh^{-1} \in G_0$ qui est donc distingué.

Cas 1 : $G_0 \neq \{I_n\}$.

Il existe $r \in G_0$ semblable à une matrice $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $\theta \in]0; \pi[$

car $r \neq I_n$ et l'angle d'une rotation est défini au signe près (en changeant le sens de l'axe de rotation).

Si $\cos \theta > 0$, $\theta \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[$ et on pose $N = \left\lfloor \frac{\theta}{2\pi} \right\rfloor$.

Alors

$$N\theta \leq \frac{\pi}{2} < (N+1)\theta < \pi.$$

Par conséquent r^{N+1} est une rotation d'angle dans $\left[\frac{\pi}{2}; \pi \right]$

Donc dans tous les cas, il existe un élément $s \in G_0$ tel que s est semblable à une matrice $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi \right]$.

Il existe un chemin continu $\gamma : [0; 1] \rightarrow G_0$ de I_n à s .

Comme l'application $\text{tr}(\gamma) - 1$ est continue et $\text{tr}(\gamma(1)) - 1 \leq 0 \leq \text{tr}(\gamma(0)) - 1$, par théorème des valeurs intermédiaires, il existe $t \in [0; 1]$ tel que $\text{tr}(\gamma(t)) - 1 = 0$.

Or $\gamma(t)$ est semblable à une matrice de rotation $\begin{pmatrix} \cos \theta' & -\sin \theta' & 0 \\ \sin \theta' & \cos \theta' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de trace 1, ce qui implique $\theta' = \frac{\pi}{2}$.

Donc $\gamma(t)^2$ est semblable à une matrice de rotation d'angle π : $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Donc $\gamma(t)^2 \in G_0$ est un retournement d'axe $\Delta = \ker(\gamma(t)^2 - I_n)$.

Pour tout $g \in \text{SO}_3(\mathbb{R})$, $g\gamma(t)^2g^{-1} \in G_0$ est un retournement d'axe $g(\Delta)$. De plus pour toute droite vectorielle D , il existe une rotation $g \in \text{SO}_3(\mathbb{R})$ telle que $D = g(\Delta)$.

On conclut que G_0 contient tous les retournements. Or les retournements engendrent $\text{SO}_3(\mathbb{R})$. Donc $\text{SO}_3(\mathbb{R}) \subset G_0 \subset G$ ce qui donne $G = \text{SO}_3(\mathbb{R})$.

Cas 2 : $G_0 = \{I_n\}$.

On montre que les composantes connexes par arcs de G sont des singletons.

Soient $g, g' \in G$ dans la même composante connexe par arcs.

On note $\gamma : [0; 1] \rightarrow G$ un chemin continu reliant g à g' .

Alors l'application $g^{-1}\gamma : [0; 1] \rightarrow G$ est un chemin continu de I_n à $g^{-1}g'$.
On en déduit que $g^{-1}g' \in G_0 = \{I_n\}$ soit $g = g'$.

On suppose qu'il existe $g \in G - \{I_n\}$.
Soit $h \in \text{SO}_3(\mathbb{R})$.

Il existe $P \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$ tel que $PhP^{-1} = R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On définit l'application $t \mapsto P^{-1}R_{t\theta}P$ qui forme un chemin continu de I_n à h dans $\text{SO}_3(\mathbb{R})$.

Comme G est distingué, $t \mapsto (P^{-1}R_{t\theta}P) \cdot g \cdot (P^{-1}R_{t\theta}P)^{-1}$ est un chemin continu dans G de g à hgh^{-1} .

D'où hgh^{-1} est dans la composante connexe par arcs de g dans G .

D'après le paragraphe précédent, on a donc $hgh^{-1} = g$.

On en déduit que l'axe de rotation de g est invariante par h pour toute rotation $h \in \text{SO}_3(\mathbb{R})$.

Or aucune droite n'est invariante pour toute rotation de l'espace.

Contradiction.

Donc $G = \{I_n\}$.

Ainsi $G = \{I_n\}$ ou $\text{SO}_3(\mathbb{R})$, ce qui est suffisant pour conclure que $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ est simple. $\square$