
Polynômes de Bernstein

Définition — Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. On définit le module de continuité de f par

$$\omega_f(h) = \sup \{ |f(u) - f(v)|, |u - v| \leq h \}, h \geq 0.$$

Comme l'ensemble $\{(u, v) \in [a; b]^2 / |u - v| \leq h\}$ est compact et l'application $(u, v) \mapsto |f(u) - f(v)|$ est continue, $\omega_f(h)$ est bien défini pour tout $h \geq 0$.

Lemme — Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

- ω_f est croissante
- $\lim_{h \rightarrow 0} \omega_f(h) = 0$
- $\forall h_1, h_2 \geq 0, \omega_f(h_1 + h_2) \leq \omega_f(h_1) + \omega_f(h_2)$
- $\forall h, \lambda \geq 0, \omega_f(\lambda h) \leq (\lambda + 1) \omega_f(h)$.

DÉMONSTRATION

- Ce point est direct.
- Comme f est continue sur $[a; b]$, d'après le théorème de Heine, f est uniformément continue, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall |x - y| \leq \delta, |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

D'où

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \omega_f(\delta) \leq \varepsilon.$$

Par croissance,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall h \leq \delta, \omega_f(h) \leq \varepsilon$$

soit

$$\lim_{h \rightarrow 0} \omega_f(h) = 0.$$

-
- Soient $h_1, h_2 \geq 0$. Soient $|x - y| \leq h_1 + h_2$.
 Il existe $z \in [a; b]$ tel que $|x - z| \leq h_1$ et $|y - z| \leq h_2$.

Par inégalité triangulaire,

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(z)| + |f(z) - f(y)| \leq \omega_f(h_1) + \omega_f(h_2).$$

En passant au sup, on conclut $\omega_f(h_1 + h_2) \leq \omega_f(h_1) + \omega_f(h_2)$.

- Soient $h, \lambda \geq 0$. Alors

$$\begin{aligned} \omega_f(\lambda h) &\leq \omega_f((\lfloor \lambda \rfloor + 1)h) \text{ par croissance} \\ &\leq (\lfloor \lambda \rfloor + 1) \omega_f(h) \text{ d'après le point précédent} \\ &\leq (\lambda + 1) \omega_f(h) \end{aligned}$$

□

Théorème

Soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$B_n(f) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} X^k (1 - X)^{n-k}.$$

Alors la suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[0; 1]$:

$$\|f - B_n(f)\|_\infty \leq \frac{3}{2} \omega_f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

DÉMONSTRATION

Soit $x \in [0; 1]$. Soit $n \geq 1$.

Soit S_n une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(n, x)$.

On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) &= \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \mathbb{P}(S_n = k) \\ &= \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k} = B_n(f)(x). \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
|f(x) - B_n(f)(x)| &= \left| \mathbb{E} \left(f(x) - f \left(\frac{S_n}{n} \right) \right) \right| \\
&\leq \mathbb{E} \left(\left| f(x) - f \left(\frac{S_n}{n} \right) \right| \right) \\
&\leq \mathbb{E} \left(\omega_f \left(\left| x - \frac{S_n}{n} \right| \right) \right) \text{ par définition de } \omega_f \\
&\leq \mathbb{E} \left(\omega_f \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{n} \left| x - \frac{S_n}{n} \right| \right) \right) \\
&\leq \mathbb{E} \left(\omega_f \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \left[\sqrt{n} \left| x - \frac{S_n}{n} \right| + 1 \right] \right)
\end{aligned}$$

d'après le dernier point du lemme

$$\begin{aligned}
&\leq \omega_f \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \left[\sqrt{n} \mathbb{E} \left(\left| x - \frac{S_n}{n} \right| \right) + 1 \right] \\
&\leq \omega_f \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \left[\sqrt{n} \sqrt{\mathbb{E} \left(\left(x - \frac{S_n}{n} \right)^2 \right)} + 1 \right]
\end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$\begin{aligned}
&\leq \omega_f \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \left[\sqrt{n} \sqrt{\text{Var} \left(\frac{S_n}{n} \right)} + 1 \right] \text{ car } \mathbb{E} \left(\frac{S_n}{n} \right) = x \\
&\leq \omega_f \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \left[\frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\text{Var}(S_n)} + 1 \right] \\
&\leq \omega_f \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \left[\sqrt{x(1-x)} + 1 \right] \\
&\leq \frac{3}{2} \omega_f \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \text{ car } x \mapsto x(1-x) \text{ est maximal en } x = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Donc

$$\|f - B_n(f)\|_\infty \leq \frac{3}{2} \omega_f \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right).$$

D'après le deuxième point du lemme, c'est suffisant pour conclure que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - B_n(f)\|_\infty = 0. \quad \square$$

Par ailleurs avec des hypothèses supplémentaires sur f (régularité ou lipschitzianité) on peut décrire plus précisément la vitesse de convergence.