Nombres de Bell

Définition — *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note B_n le nombre de partitions de l'ensemble $[\![1; n]\!]$. Par convention $B_0 = 1$.*

Lemme — $\forall n \in \mathbb{N},\ B_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k.$

DÉMONSTRATION
Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $0 \leqslant k \leqslant n$.
On note E_k l'ensemble des permutations pour laquelle $n+1$ est dans une partie de $[\![1; n+1]\!]$ de cardinal $k+1$.
Comme il y a $\displaystyle\binom{n}{k}$ choix pour les k autres éléments de la partie de $[\![1; n+1]\!]$ où se trouve l'élément $n+1$ et B_{n-k} choix pour le reste de la partition,

$$\mathrm{Card}\,(E_k) = \binom{n}{k} B_{n-k}.$$

Donc $B_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k.$ □

Proposition — $\forall k \in \mathbb{N},\ B_k = \displaystyle\frac{1}{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^k}{n!}.$

DÉMONSTRATION
On étudie la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} z^n.$

On montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ B_n \leqslant n!$.
C'est vrai pour $n = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} B_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k \text{ d'après la relation de récurrence calculée dans le lemme} \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} n! \leqslant n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!} \leqslant (n+1)! \end{aligned}$$

Comme on majore $\dfrac{B_n}{n!}$ par 1, la série entière étudiée a au moins le rayon de convergence de la série géométrique, c'est-à-dire 1.

On note $f(z)$ la somme de la série entière (sur le domaine où celle-ci converge).

D'après les résultats sur la dérivée d'une série entière, la fonction f est dérivable sur le disque ouvert de rayon 1, de dérivée

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{B_n}{(n-1)!} z^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_{n+1}}{n!} z^n.$$

Donc

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k \right) \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{B_k}{k!(n-k)!} \right) z^n.$$

On reconnaît un produit de Cauchy des séries entières $f(z)$ et exponentielle, d'où

$$\forall\, |z| < 1,\ f'(z) = f(z) e^z.$$

La seule solution de ce problème de Cauchy telle que $f(0) = \frac{B_0}{0!} = 1$ est :

$$\forall\, |z| < 1,\ f(z) = \frac{1}{e} e^{e^z}.$$

Comme la série entière de l'exponentielle a un rayon de convergence infini,

$$\forall z \in \mathbb{C},\ e^{e^z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{zn}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(zn)^k}{k!} \right) \frac{1}{n!}$$

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on démontre que la série double de terme général $u_{n,k} = \dfrac{(zn)^k}{k!n!}$

est sommable sur $\mathbb{N}^2$.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{+\infty} |u_{n,k}| = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(|z|\,n)^k}{k!n!} = \frac{1}{n!}e^{|z|n}$$

de plus

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{|z|n}}{n!} = e^{e^{|z|}} < +\infty.$$

Comme la série double $(u_{n,k})_{(k,n)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable, d'après le théorème de Fubini pour la mesure de comptage, on peut inverser l'ordre de sommation :

$$e^{e^z} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(zn)^k}{n!k!}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^k}{n!}\right)\frac{z^k}{k!}.$$

On conclut par unicité du développement en séries entières

$$\forall k \in \mathbb{N},\ B_k = \frac{1}{e}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^k}{n!}. \qquad \square$$