
Méthode de Newton

Théorème

Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^2$. Soit $\ell \in [a; b]$.

On suppose que $f(\ell) = 0$ et $f'(\ell) \neq 0$.

Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que toute suite de la forme

$$\begin{cases} x_0 \in [\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon] \\ \forall k \in \mathbb{N}, x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \end{cases}$$

est bien définie et converge quadratiquement vers ℓ .

DÉMONSTRATION

Par continuité de f' , il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall |x - \ell| \leq \delta, f'(x) \neq 0.$$

On pose

$$m = \inf_{[\ell - \delta; \ell + \delta]} |f'| > 0 \text{ et } M = 1 + \sup_{[\ell - \delta; \ell + \delta]} |f''| \in]0; +\infty[.$$

On pose

$$\eta = \frac{m}{M} > 0.$$

On choisit

$$\varepsilon = \min(\eta, \delta).$$

Par hypothèse, $x_0 \in [\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon]$ est bien défini.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On suppose la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bien définie jusqu'au terme n et $x_n \in [\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon]$.

Comme $x_n \in [\ell - \delta; \ell + \delta]$, on a $f'(x_n) \neq 0$ et le terme x_{n+1} est bien défini :

$$\begin{aligned} x_{n+1} - \ell &= x_n - \ell - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ &= \frac{1}{f'(x_n)} [f(\ell) - f(x_n) - f'(x_n)(\ell - x_n)] \end{aligned}$$

D'après la formule de Taylor-Lagrange, il existe z_n entre ℓ et x_n tel que

$$f(\ell) = f(x_n) + f'(x_n)(\ell - x_n) + \frac{f''(z_n)}{2}(\ell - x_n)^2.$$

D'où

$$x_{n+1} - \ell = \frac{f''(z_n)}{2f'(x_n)}(x_n - \ell)^2$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - \ell| &= \frac{|f''(z_n)|}{2|f'(x_n)|} |x_n - \ell|^2 \leq \frac{M}{2m} \varepsilon |x_n - \ell| \\ &\leq \frac{1}{2} |x_n - \ell| \\ &\leq \frac{1}{2} \varepsilon \leq \varepsilon \end{aligned}$$

On a bien montré que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie jusqu'au terme $n + 1$ et $x_{n+1} \in [\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon]$.

Par récurrence, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.

Par ailleurs, on a montré que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |x_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{2} |x_n - \ell|$$

et la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ .

On suppose que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas stationnaire.

D'après précédemment, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{x_{n+1} - \ell}{(x_n - \ell)^2} = \frac{f''(z_n)}{2f'(x_n)}.$$

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, z_n est entre ℓ et x_n , par convergence de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ .

Par continuité de f' et f'' ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1} - \ell}{(x_n - \ell)^2} = \frac{f''(\ell)}{2f'(\ell)}.$$

Si $f''(\ell) \neq 0$, on a

$$x_{n+1} - \ell \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{f''(\ell)}{2f'(\ell)}(x_n - \ell)^2.$$

Si $f''(\ell) = 0$, la convergence est encore plus rapide :

$$x_{n+1} - \ell \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o((x_n - \ell)^2).$$

Dans tous les cas, la convergence est (au moins) quadratique.

□