
Inégalité de Le Cam

Lemme — Soient X et Y deux var discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$. Alors

$$\forall A \subset \mathbb{N}, \left| \mathbb{P}(X \in A) - \mathbb{P}(Y \in A) \right| \leq \mathbb{P}(X \neq Y).$$

DÉMONSTRATION

Soit $A \subset \mathbb{N}$. Alors

$$\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(X \in A \cap X \neq Y) + \mathbb{P}(X \in A \cap X = Y) \leq \mathbb{P}(X \neq Y) + \mathbb{P}(Y \in A)$$

Symétriquement on trouve

$$\mathbb{P}(Y \in A) \leq \mathbb{P}(X \neq Y) + \mathbb{P}(X \in A)$$

Ces deux inégalités sont suffisantes pour conclure. □

Théorème

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $0 < 2\lambda < n$.

Alors si $X \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$, on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left| \mathbb{P}(X = k) - \mathbb{P}(Y = k) \right| \leq \frac{4\lambda^2}{n}.$$

DÉMONSTRATION

On note $p = \frac{\lambda}{n}$. On définit la loi m_p sur $\mathbb{N} \times \{0; 1\}$ par :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = Y = 0) &= e^{-p} - p(1 - e^{-p}) \\ \mathbb{P}(X = 0, Y = 1) &= p(1 - e^{-p}) \\ \mathbb{P}(X = 1, Y = 0) &= 0 \\ \mathbb{P}(X = Y = 1) &= pe^{-p} \\ \forall k \in \mathbb{N} - \{0; 1\}, \quad \mathbb{P}(X = k, Y = 1) &= 0 \\ \mathbb{P}(X = k, Y = 0) &= \frac{p^k}{k!} e^{-p} \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = Y = 0) &= e^{-p}(1+p) - p \\ &\geq (1-p)(1+p) - p = 1 - p^2 - p \\ &\geq 1 - 2p \geq 0\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{+\infty} [\mathbb{P}(X = k, Y = 0) + \mathbb{P}(X = k, Y = 1)] &= e^{-p} + pe^{-p} + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{p^k}{k!} e^{-p} \\ &= 1\end{aligned}$$

cette loi est bien définie.

De plus si le couple de variables aléatoires (X, Y) suit la loi m_p alors $X \sim \mathcal{P}(p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(1, p)$.

Soient $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ couples de variables aléatoires i.i.d. de loi m_p .

Alors $X = X_1 + \dots + X_n \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y = Y_1 + \dots + Y_n \sim \mathcal{B}(n, \frac{\lambda}{n})$.

On note $A = \{k \in \mathbb{N} / \mathbb{P}(X = k) \geq \mathbb{P}(Y = k)\}$.

Alors

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{+\infty} |\mathbb{P}(X = k) - \mathbb{P}(Y = k)| \\
&= \sum_{k \in A} [\mathbb{P}(X = k) - \mathbb{P}(Y = k)] + \sum_{k \in \mathbb{N} - A} [\mathbb{P}(Y = k) - \mathbb{P}(X = k)] \\
&= \mathbb{P}(X \in A) - \mathbb{P}(Y \in A) + \mathbb{P}(X \in \mathbb{N} - A) - \mathbb{P}(Y \in \mathbb{N} - A) \\
&\leq 2 \cdot \mathbb{P}(X \neq Y) \\
&\leq 2 \cdot \mathbb{P}(\exists i \in \llbracket 1; n \rrbracket, X_i \neq Y_i) \\
&\leq 2 \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \neq Y_i) = 2n - 2 \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = Y_i) \\
&\leq 2n - 2 \sum_{i=1}^n [\mathbb{P}(X_i = Y_i = 0) + \mathbb{P}(X_i = Y_i = 1)] \\
&\leq 2n - 2n \cdot [e^{-p}(1 + 2p) - p] \\
&\leq 2n - 2n \cdot [(1 - p)(1 + 2p) - p] = 4np^2 = \frac{4\lambda^2}{n}
\end{aligned}$$

On a établi l'inégalité souhaitée. Comme celle-ci ne dépend que des lois de X et de Y , et pas de leur couplage, alors on a établi l'inégalité dans le cas général. $\square$

Corollaire — Soit $\lambda > 0$. On a la convergence en loi

$$\mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \mathcal{P}(\lambda).$$