
Inégalité isopérimétrique

Théorème

Soit $[a; b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$. Soit $\gamma : [a; b] \rightarrow \mathbb{C}$ un lacet simple de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux tel que

$$\forall t \in [a; b], \gamma'(t) \neq 0.$$

On note sa longueur ℓ et la surface S enfermée par γ . Alors

$$\ell^2 \geq 4\pi S.$$

De plus l'inégalité est saturée ssi γ est un cercle parcouru une fois.

DÉMONSTRATION

On démontre le théorème dans le cas où γ est de classe $\mathcal{C}^1$. Sinon on doit juste raisonner par morceaux et par recollement, avec éventuellement des problèmes sur un nombre fini de points de discontinuité de γ' , ce qui n'est pas gênant.

Quitte à appliquer une homothétie, on peut supposer $\ell = \int_a^b |\gamma'(t)| dt = 2\pi$.

On va reparamétriser γ par la paramétrisation naturelle, c'est-à-dire par la longueur de l'arc (on parle aussi d'abscisse curviligne).

Pour tout $x \in [a; b]$, on pose

$$L(x) = \int_a^x |\gamma'(t)| dt.$$

D'après les hypothèses sur γ , L est de classe $\mathcal{C}^1$ et sa dérivée strictement positive.

Par théorème d'inversion globale, L induit un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme $]a; b[\rightarrow]0; 2\pi[$.

Comme $L : [a; b] \rightarrow [0; 2\pi]$ est bijective, on pose le lacet simple de classe $\mathcal{C}^1$

$$\tau = \gamma \circ L^{-1} : [0; 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}.$$

Soit $s \in [0; 2\pi]$.

$$\begin{aligned}\int_0^s |\tau'(t)| dt &= \int_0^s |(L^{-1})'(t) \gamma'(L^{-1}(t))| dt \text{ en dérivant la composée} \\ &= \int_{L^{-1}(0)}^{L^{-1}(s)} |\gamma'(u)| du \\ &\text{par le changement de variable } u = L^{-1}(t). \\ &= \int_a^{L^{-1}(s)} |\gamma'(u)| du \\ &= L(L^{-1}(s)) = s.\end{aligned}$$

On dérive la relation :

$$\forall s \in [0; 2\pi], |\tau'(s)| = 1.$$

Donc τ est une nouvelle paramétrisation de l'arc qui le parcourt à vitesse constante.

Par ailleurs, quitte à changer $\tau(s)$ pour $\tau(2\pi - s)$, on peut supposer que τ est orientée positivement.

Comme $\tau(0) = \tau(2\pi)$, on peut prolonger τ en une fonction 2π -périodique de classe $\mathcal{C}^1$.

$$\begin{aligned}\ell &= \int_0^{2\pi} |\tau'(s)| ds = \int_0^{2\pi} |\tau'(s)|^2 ds \\ &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(\tau')|^2 \text{ d'après la formule de Parseval} \\ &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |in c_n(\tau)|^2 \text{ par la relation classique entre coefficients de Fourier de } \tau' \text{ et } \tau \\ &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2 |c_n(\tau)|^2\end{aligned}$$

Par ailleurs au vu des hypothèses, d'après le théorème de Jordan, $\mathbb{C} - \tau([0; 2\pi])$ admet 2 composantes connexes dont une bornée qu'on note C_0 . De plus $\tau([0; 2\pi])$ est la frontière de C_0 .

Alors $\overline{C_0}$ est un compact à bord et d'après la formule de Green-Riemann,

$$S = \frac{1}{2} \int_{\tau} (x dy - y dx) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (x(s)y'(s) - y(s)x'(s)) ds$$

$$\text{où } \tau(s) = x(s) + iy(s)$$

$$= \frac{1}{2} \Im \left(\int_0^{2\pi} \tau'(s) \overline{\tau(s)} ds \right)$$

$$= \pi \Im \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(\tau') \overline{c_n(\tau)} \right)$$

d'après la formule de Parseval version produit scalaire

$$= \pi \Im \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} in |c_n(\tau)|^2 \right)$$

$$= \pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n |c_n(\tau)|^2.$$

Ainsi

$$\ell^2 - 4\pi S = 2\pi(\ell - 2S) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (n^2 - n) |c_n(\tau)|^2 \geq 0.$$

De plus l'inégalité est saturée si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{Z} - \{0; 1\}, c_n(\tau) = 0.$$

Par unicité des coefficients de Fourier, c'est équivalent à

$$\forall s \in [0; 2\pi], \tau(s) = c_0(\tau) + c_1(\tau) e^{is}$$

c'est-à-dire au fait que τ (et donc γ) soit un cercle de centre $c_0(\tau)$ et de rayon $|c_1(\tau)|$ parcouru une fois dans le sens direct. $\square$