

---

# Hahn-Banach géométrique

## **Théorème (Hahn-Banach analytique)**

Soit  $p : E \rightarrow \mathbb{R}$  tel que

- $\forall \lambda > 0, \forall x \in E, p(\lambda x) = \lambda p(x)$
- $\forall x, y \in E, p(x + y) \leq p(x) + p(y)$

Soit  $G$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Soit  $g : G \rightarrow \mathbb{R}$  une forme linéaire telle que

$$\forall x \in G, g(x) \leq p(x).$$

Alors il existe une forme linéaire  $f$  qui prolonge  $g$  sur  $E$  telle que

$$\forall x \in E, f(x) \leq p(x).$$

**Lemme** — Soit  $C \subset E$  un convexe ouvert avec  $0 \in C$ . On note  $p$  sa jauge. Alors

- $\forall \lambda > 0, \forall x \in E, p(\lambda x) = \lambda p(x)$
- $\forall x, y \in E, p(x + y) \leq p(x) + p(y)$
- $\exists M > 0, \forall x \in E, 0 \leq p(x) \leq M \|x\|$
- $C = \{x \in E / p(x) < 1\}$ .

## **DÉMONSTRATION**

- Le premier point est immédiat.

- Soit  $x \in C$ .

Comme  $C$  est ouvert, il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $(1 + \varepsilon)x \in C$ .

Alors  $p(x) \leq \frac{1}{1+\varepsilon} < 1$ .

Soit  $x \in E$  tel que  $p(x) < 1$ .

Il existe  $0 < \alpha < 1$  tel que  $\alpha^{-1}x \in C$ .

Par convexité de  $C$ ,  $x = \alpha(\alpha^{-1}x) + (1 - \alpha)0 \in C$ .

- La positivité de  $p$  est triviale.

Comme  $C$  est ouvert, il existe  $r > 0$  tel que  $\mathbb{B}(0, r) \subset C$ .

D'où  $\forall x \in E, \frac{r}{2} \cdot \frac{x}{\|x\|} \in C$ .

D'après le point précédent,  $\forall x \in E, p\left(\frac{r}{2} \cdot \frac{x}{\|x\|}\right) < 1$ .

D'après le premier point,  $\forall x \in E, p(x) \leq \frac{2}{r} \|x\|$ .

- Soient  $x, y \in E$ . Soit  $\varepsilon > 0$ .

D'après les 2 premiers points,  $\frac{x}{p(x) + \varepsilon} \in C$  et  $\frac{y}{p(y) + \varepsilon} \in C$ .

On pose  $t = \frac{p(x) + \varepsilon}{p(x) + p(y) + 2\varepsilon}$ .

Par convexité,  $t \frac{x}{p(x) + \varepsilon} + (1 - t) \frac{y}{p(y) + \varepsilon} = \frac{x + y}{p(x) + p(y) + 2\varepsilon} \in C$ .

D'après les 2 premiers points, on en déduit que  $p(x + y) < p(x) + p(y) + 2\varepsilon$ .

On passe à la limite :  $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ . □

**Lemme** — Soit  $C$  un convexe ouvert non vide. Soit  $x_0 \in E - C$ .

Alors il existe  $f \in E'$  tel que

$$\forall x \in C, f(x) < f(x_0).$$

En particulier, l'hyperplan d'équation  $[f = f(x_0)]$  sépare  $\{x_0\}$  et  $C$  au sens large.

#### DÉMONSTRATION

On peut supposer sans perte de généralités que  $0 \in C$  (sinon on translate  $C$  et  $x_0$ ).

On pourra ainsi considérer la jauge  $p$  de  $C$ .

On pose  $G = \mathbb{R}x_0$  et  $g : \begin{array}{ccc} G & \rightarrow & \mathbb{R} \\ \lambda x_0 & \mapsto & \lambda \end{array}$ .

On a  $\forall \lambda > 0, g(\lambda x_0) = \lambda < 0 \leq p(\lambda x_0)$

et

$\forall \lambda \geq 0, g(\lambda x_0) = \lambda \leq p(\lambda x_0) = p(\lambda x_0)$ .

Ainsi  $\forall x \in G, g(x) \leq p(x)$ .

---

D'après le théorème de Hahn-Banach analytique, il existe un prolongement  $f$  de  $g$  sur  $E$  tel que

$$\forall x \in E, f(x) \leq p(x).$$

En particulier,

$$\forall x \in C, f(x) \leq p(x) < 1 = f(x_0)$$

L'hyperplan  $H$  d'équation  $[f = f(x_0)]$  sépare au sens large  $C$  et  $\{x_0\}$ .

Comme  $\forall x \in E, f(x) \leq p(x) \leq M \|x\|$ ,  $f$  est continue et l'hyperplan  $H$  est fermé.  $\square$

### **Théorème (Hahn-Banach géométrique)**

*Soient  $A, B \subset E$  convexes, non vides, disjoints. On suppose  $A$  ouvert. Alors il existe un hyperplan fermé qui sépare  $A$  et  $B$  au sens large.*

### **DÉMONSTRATION**

On pose  $C = A - B$  (soustraction au sens de Minkowski).

$C$  est convexe car  $A$  et  $B$  le sont.

$C = \bigcup_{y \in B} (A - y)$  est ouvert par union d'ouverts.

Comme  $A$  et  $B$  sont disjoints,  $0 \notin C$ .

On peut appliquer notre lemme pour  $C$  et  $0$ , c'est-à-dire qu'il existe une forme linéaire continue  $f$  telle que

$$\forall z \in C, f(z) < f(0) = 0.$$

D'où par linéarité de  $f$ ,

$$\forall x \in A, \forall y \in B, f(x) < f(y).$$

En choisissant  $\alpha \in \left[ \sup_{x \in A} f(x) ; \inf_{y \in B} f(y) \right]$ , l'hyperplan  $H$  d'équation  $[f = \alpha]$  sépare  $A$  et  $B$  au sens large.

Par ailleurs, par continuité de  $f$ ,  $H$  est fermé.  $\square$