

V14
11/06/15
1

Théorème de Pappus (binapport) 187, 182, 183

version Comte-Klobeckien

Proposition

Soit φ une homographie de $\mathbb{P}^1(K)$, $\varphi \neq \text{id}$. Il y a équivalence entre :

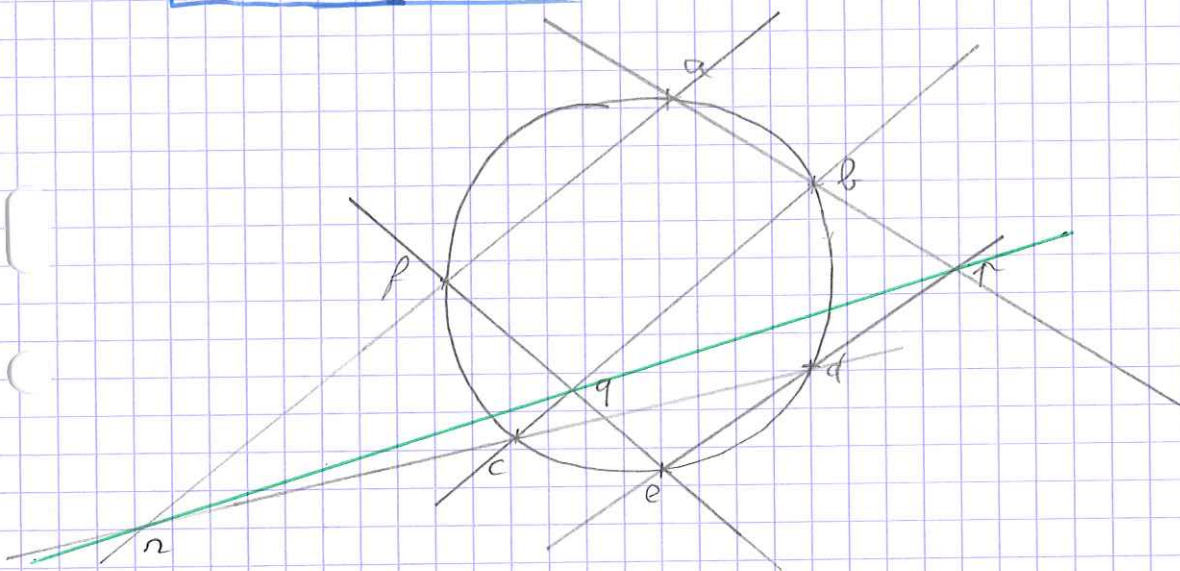
- i) φ est une involution.
- ii) φ est de trace nulle.
- iii) Il existe $p \in \mathbb{P}^1(K)$ tel que $\varphi(p) \neq p$ et $\varphi^2(p) = p$.

Rq: ii) signifie que tout antécédent de φ dans $GL_2(K)$ a une trace nulle.

Théorème

Soit $\mathcal{C}$ le cercle unité de $\mathbb{C}$. Soient a, b, c, d, e, f six points distincts de $\mathcal{C}$ dont trois ne sont jamais alignés. ^{évident}

Soient $p = (ab) \cap (de)$, $q = (bc) \cap (ef)$ et $r = (cd) \cap (af)$ s'ils existent. Alors p, q et r sont alignés.



dém (prop) :

(i) $\Leftrightarrow$ (ii): $\varphi = \overline{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$\overline{M}^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(atd) \\ c(atd) & d^2 + bc \end{pmatrix}$$

et atd

Si $c=b=0$, φ est une involution ssi $a^2 = d^2$ ssi $a = \pm d$ ssi $atd = 0$ (car $\varphi \neq \text{id}$)

Si b ou c est non nul, $\bar{\pi}$ est une involution ssi $a+d=0$

Donc φ est une involution ssi φ est de trace nulle.

(i) $\Rightarrow$ (iii): clair.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Soit $p \in \mathbb{P}^1(K)$ tel que $\varphi(p) \neq p$ et $\varphi^2(p) = p$.

Alors $\varphi^2(\varphi(p)) = \varphi(\varphi^2(p)) = \varphi(p)$.

Soit $q \notin \{p, \varphi(p)\}$. Alors $[\varphi(q), p, \varphi(p), q]$ est bien défini (trois points parmi quatre distincts).

$$[\varphi(q), p, \varphi(p), q] = [\varphi^2(q), \varphi(p), p, \varphi(q)] \quad \text{car } \varphi \in \text{PGL}_2(K).$$

$$= 1 - [\varphi^2(q), p, \varphi(p), \varphi(q)]$$

$$= 1 - [p, \varphi^2(q), \varphi(q), \varphi(p)]$$

$$= [p, \varphi(q), \varphi^2(q), \varphi(p)]$$

$$= [\varphi(q), p, \varphi(p), \varphi^2(q)]$$

Donc $\varphi^2(q) = q$: φ^2 est une involution.

voir
29

Is dans la leçon birapport, démo
le même plutôt que de faire
des calculs d'éq de la droite.

dém (théorème):

Soit $\mathcal{C}$ le cercle unité.

Soient $x, y \in \mathcal{C}$; $x \neq y$.

Equation de la droite (xy) :

$$z + \alpha \bar{z} + \beta = 0.$$

$$\begin{cases} x + \alpha \bar{x} + \beta = 0 \\ y + \alpha \bar{y} + \beta = 0 \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{x-y}{\bar{z}-\bar{y}} = - \frac{(x-y)xy}{(\bar{x}-\bar{y})xy}$$

$$= - \frac{(x-y)xy}{y-x} = xy.$$

donc $\alpha = xy$ et $\beta = -x-y$.

$$z \in (xy) \quad \text{ssi} \quad z + xy\bar{z} = x+y \quad \text{ssi} \quad y = \frac{x-z}{\bar{z}x-1}$$

On pose $\forall$ l'homographie $s_z = \begin{pmatrix} 1 & -z \\ \bar{z} & -1 \end{pmatrix}$. Elle est de trace nulle donc c'est une involution.

s_z échange x et y .

s_p échange a et b , mais aussi d et c .

On pose $\gamma = \gamma_q \circ \gamma_n \circ \gamma_p$. Alors $\gamma \in \text{PGL}_2(\mathbb{R})$.

$$\gamma(e) = b \neq e$$

et $\gamma(b) = e$ donc $\gamma^2(e) = e$: γ est une involutive, donc de trace nulle.

$$\gamma_q \circ \gamma_n = \begin{pmatrix} 1 & -q \\ \bar{q} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -n \\ \bar{n} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - q\bar{n} & -n + q \\ \bar{q} - \bar{n} & -\bar{q}n + 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } T_n(\gamma) = T_n \left(\begin{pmatrix} 1 - q\bar{n} & q - n \\ \bar{q} - \bar{n} & 1 - \bar{q}n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -p \\ \bar{p} & -1 \end{pmatrix} \right)$$

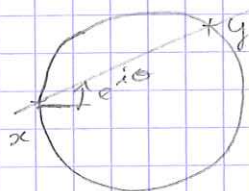
$$= 1 - q\bar{n} + \bar{p}(q - n) - p(\bar{q} - \bar{n}) - 1 + \bar{q}n$$

$$= (q - p)(\bar{q} - \bar{n}) - (\bar{q} - \bar{p})(q - n)$$

Donc $\frac{q - p}{q - n} \in \mathbb{R}$, i.e. p, q et n sont alignés.

□

Rq : Si $p = (ab) \cap (de)$ appartient à la droite à l'infini de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$,



Pour tout $z = x + Re^{i\theta}$, on a

$$y = \frac{-Re^{i\theta}}{(x + Re^{-i\theta})x - 1} = -\frac{e^{2i\theta}}{x}$$

On définit, pour p intersection de (xy) et la droite à l'infini, $\gamma_p = \begin{pmatrix} 0 & -e^{2i\theta} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. γ_p est une involutive.

Comme avant, on peut calculer $T_n \gamma$.

$$0 = T_n \gamma = T_n \left(\begin{pmatrix} 1 - q\bar{n} & q - n \\ \bar{q} - \bar{n} & 1 - \bar{q}n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -e^{2i\theta} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$= q - n - e^{2i\theta}(\bar{q} - \bar{n})$$

donc $q - n = pe^{i\theta}$: p, q et n sont alignés.

Rq: Lemme : $[a, b, c, d] = [d, c, b, a]$.

Soit $u = [a, b, c, d]$. Soit f l'homographie envoyant

$a \mapsto \infty$
 $b \mapsto 0$
 $c \mapsto 1$

Alors $f: z \mapsto u \frac{z-1}{z-u}$.

Soit g l'homographie envoyant $\begin{matrix} a \mapsto \infty \\ b \mapsto 0 \\ c \mapsto 1 \end{matrix}$. Alors $u = g(d)$

par définition du biquadrant.

$f \circ g$ envoie $\begin{matrix} d \mapsto \infty \\ c \mapsto 0 \\ b \mapsto 1 \end{matrix}$

et $[d, c, b, a] = f \circ g(a) = f(\infty) = u = [a, b, c, d]$.

□